目　　录

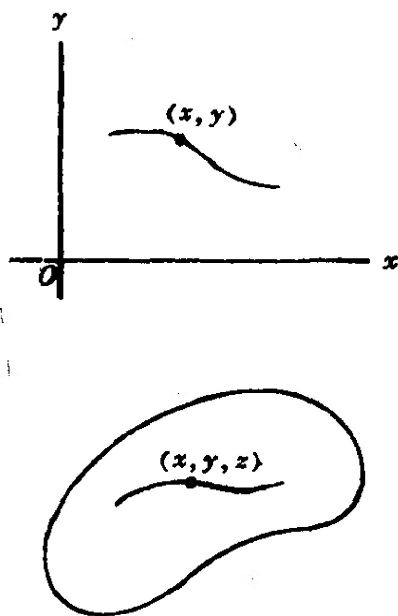
序　　论

如果使用平面直角坐标(x,y)，则弧s的微分ds可表示为

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

如果再用极坐标(r,θ)表示之，则得

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$$



当在空间里有一个曲面，因曲面具有二维的展度，故面上的点的直角坐标x，y，z可用二变数u，v表示为

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v),$$
$$z=h(u,v).$$

这时，此曲面上的弧长的微分是

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

用u，v表示之，得

$$ds^2=a(u,v)du^2+2b(u,v)dudv+c(u,v)dv^2 \qquad (1)$$

的形状。

现在考虑此曲面无伸缩地变形，这时ds并不变化。在这种情况下，曲面的许多性质之中有

在曲面无伸缩的变形下不变的性质。

而且这个性质只由(1)的ds而定。曲面的测地线、展开、共变微分、高斯曲率等都是这样性质。特别是，高斯曲率在这样曲面的变形下不变一事是高斯(C. F. Gauss 1777—1855)的伟大发现。

黎曼(G. F. B. Riemann 1826—1866)进一步发展了这样性质，他考虑点有n个坐标x_1，x_2，…，x_n的n维空间，在此空间中研究了弧长的微分ds由

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_i dx_j \qquad (2)$$

给定的情况。后人称此空间为黎曼空间。

进入本世纪以后，爱因斯坦（A. Einstein 1879—1955）运用黎曼空间做为相对论的基础以来，即使在数学家之间对此空间的研究也极盛行，在今天仍然不断获得各种兴趣盎然的成果。

从此角度看，三维空间的曲面是二维黎曼空间。在曲面的情况下，有切平面起着重大作用。然而对于一般的黎曼空间并非预先就有象切平面这样方便的东西。因此，在 n 维黎曼空间里，用某种方法在它的各点定义所谓的切空间，并将不同点处的切空间联系起来的“联络”用(2)决定下来，由此再对黎曼空间进行研究。

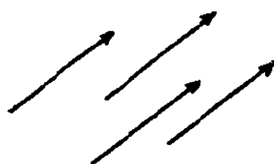
在这本书中，首先在第一章里阐述必要的数学知识，在第二章里从黎曼几何的角度考察欧氏平面与欧氏空间。在第三章里将三维空间的曲面看做二维黎曼空间，以曲面的展开、高斯曲率、测地线等重要基本概念为中心加以说明。而贯穿第四、五、六章仔细解释了 n 维空间的基本问题。

在黎曼空间里有局限于其一邻域内考虑的局部（local）性质以及牵涉空间全体的整体（大范围，global）性质，现在数学家关心的是以局部性质为基础研究整体性质的整体黎曼空间论。到本书第六章没有篇幅说明这样内容，故在第七章把没有机会叙述的一些更加深入的局部性质以及整体黎曼几何研究不加证明地简单介绍一下。想要进一步了解详细情况的读者请读卷末参考文献介绍的书。

第一章　向量与微积分

§1　向　　量

向量就是有向线段，只考虑大小与方向而不究其位置。换句话说，大小与方向相同的有向线段看做是一个向量。本书规定用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \cdots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots$等字母表示向量。

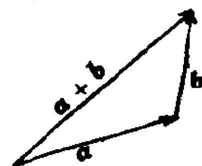


对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可以考虑 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，对于实数 k 考虑 $k\boldsymbol{a}$（也记做 $\boldsymbol{a}k$），对于这些下列计算规律成立。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\quad (k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a},$$

$$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$$



起点与终点是一点的有向线段，即由点而成的向量称为零向量，记做 0。又将 $(-1)\boldsymbol{a}$ 记做 $-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 记做 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，则

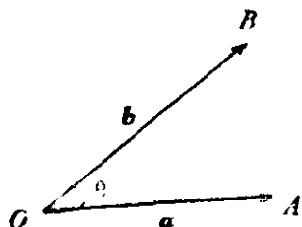


第 1.1 图

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

由这些计算规律可见，对于向量的和、差、乘以实数与普通式子一样计算即可。

其次，当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 不是零向量时，设表示它们的有向线段为 OA, OB，其夹角为 θ，定义内积$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$为



第 1.2 图

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=OA\cdot OB\cos\theta$$

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之中至少有一个是 0 时，规定内积是 0。这时令

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}$$

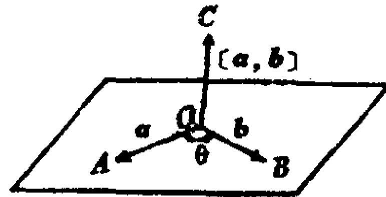
它是 OA 之长（或模）。

对于内积，下列计算规律成立。

$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}),\ (k\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),\ (\boldsymbol{a},\ k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}),\ (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b})$

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 既不是零向量，又不平行时，外积 $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 的定义如下。设 OA，OB，OC 是表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段，又设$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$时



第 1.3 图

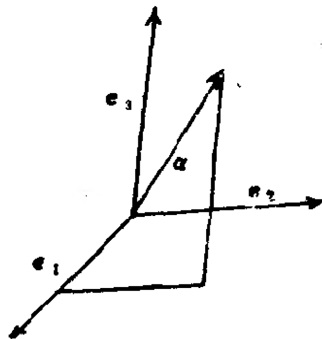
(i) OC 与平面 OAB 垂直，从 C 看，从 OA 向 OB 转 θ 角的旋转方向是正。

(ii) $OC=OA\cdot OB\sin\theta$。

又当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是 0，或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行时，规定外积$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$是 0 。对于外积，下列运算规律成立。

$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}],\ [k\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=k[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}],\ [\boldsymbol{a},\ k\boldsymbol{b}]=k[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$

$[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}]$



第 1.4 图

向量的分量 在空间里取不和同一平面平行的三个向量（称之为线性无关）记为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，则任意向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$$

这时，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$是以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为基底 $\boldsymbol{a}$ 的分量。

设二向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的分量分别为 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的分量是$(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$，$k\boldsymbol{a}$ 的分量是$(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$。

而内积为

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$$

于是令

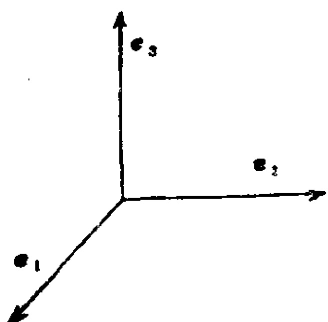
$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\qquad(1.1)$$

则

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}a_i b_j \tag{1.2}$$

特别是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}a_i a_j} \tag{1.3}$$



第 1.5 图

当 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 都是长为 1 的向量(单位向量)，而且两两垂直时，称为**标准正交基**或**正交标架**（orthogonal frame)。取标准正交基为基底时，向量的分量称为正交分量。当 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为标准正交基时，

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (当\ i=j\ 时)\\ 0 & (当\ i\neq j\ 时)\end{cases}$$

故下列事实成立。

设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的正交分量分别为$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \text{而且} \ |\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{1.4}$$

在标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 下，$[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2]=\pm\boldsymbol{e}_3$，特别当 $[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2]=\boldsymbol{e}_3$ 时，称 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 为右手系。

关于右手系的标准正交基，设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的正交分量为(a_1, a_2, a_3)，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$的分量为

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

还有，对于三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $([\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}])$成立，以$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$表示之。设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 关于右手系的正交分量分别为$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$(c_1,\ c_2,\ c_3)$，则

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

相邻三边上的向量为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的平行六面体的体积等于$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},$

$\boldsymbol{c}$)的绝对值。特别是右手系的标准正交基满足

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$$

又因

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \end{vmatrix}$$

故对于基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, 令 $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij}$, 则

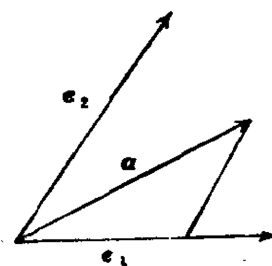
$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \pm\sqrt{g},$$

其中
$$g = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

二维向量 到目前为止，考虑了空间里的向量（三维向量），而平面上的向量（二维向量）可做为特殊情况处理。

在基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 中，取 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 在此平面内，则平面上的任意向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$$



第 1.6 图

将 (a_1, a_2) 看做 $\boldsymbol{a}$ 的分量即可．于是当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的分量为(a_1, a_2), (b_1, b_2)时，得

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的分量是(a_1+b_1, a_2+b_2),

$k\boldsymbol{a}$ 的分量是(ka_1, ka_2)。

再令

$$g_{11} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1), \quad g_{12} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), \quad g_{22} = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2),$$

则

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i,j} g_{ij}a_ib_j = g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2}$$

对于平面上的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ 总与此平面垂直。取右手系标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 使 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 在此平面上，令 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的分量为

$(a_1, a_2, 0)$，$(b_1, b_2, 0)$，则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$的分量为$(0,0,a_1b_2-a_2b_1)$，故在平面上，右手系正交分量为$(a_1, a_2)$，$(b_1, b_2)$的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，可看做

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

特别是对于基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，令$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij}$ $(i, j=1, 2)$，则得

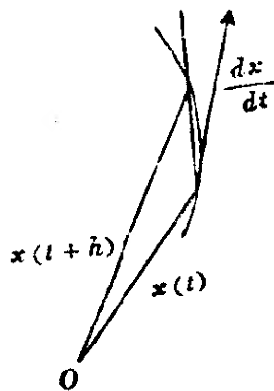
$$|[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]|^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

故以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为二边上的向量的平行四边形，其面积为$\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$。

向量的微分法　有变数 t，对应于 t 的值，向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 决定时，以

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{x}(t+h)-\boldsymbol{x}(t)}{h}$$

定义$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$。



第 1.7 图

若 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

又当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$时，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{y}\right) + \left(\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right) \\ \frac{d}{dt}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] &= \left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{y}\right] + \left[\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(t)$时

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = &\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\right) + \left(\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}, \boldsymbol{z}\right) \\ &+ \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{d\boldsymbol{z}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

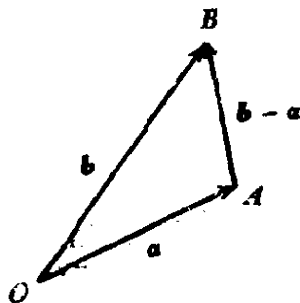
对于二变数 u，v 的向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，考虑 $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}$，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$，再令

$$d\boldsymbol{x}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}du+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}dv$$

对于有三个以上自变数的向量函数也一样。

位置向量 在空间里，取定原点 O，则对于任意的点 A，决定有向线段 OA，于是就决定此向量 $\boldsymbol{a}$，称此 $\boldsymbol{a}$ 为点 A 的**位置向量**（或**坐标向量**），也称点 A 为点 $\boldsymbol{a}$。

在这种含义下，从点 $\boldsymbol{a}$ 到点 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。



第 1.8 图

当取原点 O 与基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 时，点 A 的位置向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量 (a_1, a_2, a_3) 是点 A 的仿射坐标，特别取标准正交基时，则 (a_1, a_2, a_3) 为直角坐标。

在空间中有一条曲线时，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是该曲线的位置向量用参数 t 的表达式。这时 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ 是切向量。又此曲线在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 间之长为

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)}\,dt$$

固定 t_0，令 t_1 为 t，则 s 可看做 t 的函数。于是

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)} \tag{1.10}$$

在这种意义下，记

$$ds^2=(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}). \tag{1.11}$$

若重新取 s 为参变数以代替 t，则由(1.10)得

对于曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$ 为其单位切向量。 (1.12)

§2 张　　量

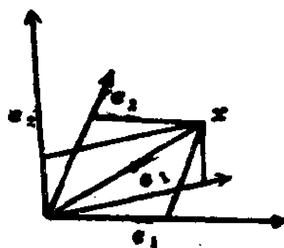
在平面上取 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基本向量时，设向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量为 x_1，x_2，则

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2 \tag{2.1}$$

若将基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 在变换

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{e}}_1&=p_{11}\boldsymbol{e}_1+p_{12}\boldsymbol{e}_2\\ \overline{\boldsymbol{e}}_2&=p_{21}\boldsymbol{e}_1+p_{22}\boldsymbol{e}_2\end{aligned}\left(\begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{vmatrix}\neq 0\right) \tag{2.2}$$

下变为 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$ 时，设 $\boldsymbol{x}$ 的分量变为 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，则



第 1.9 图

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\overline{x}_1\overline{\boldsymbol{e}}_1+\overline{x}_2\overline{\boldsymbol{e}}_2=\overline{x}_1(p_{11}\boldsymbol{e}_1+p_{12}\boldsymbol{e}_2)+\overline{x}_2(p_{21}\boldsymbol{e}_1+p_{22}\boldsymbol{e}_2)\\&=(p_{11}\overline{x}_1+p_{21}\overline{x}_2)\boldsymbol{e}_1+(p_{12}\overline{x}_1+p_{22}\overline{x}_2)\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

此式与(2.1)比较之得

$$\begin{aligned}x_1&=p_{11}\overline{x}_1+p_{21}\overline{x}_2\\x_2&=p_{12}\overline{x}_1+p_{22}\overline{x}_2\end{aligned} \tag{2.3}$$

总之，在基底变换(2.2)下，向量的分量按(2.3)变化。

一般地说，有一量 u，关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的分量为 u_1，u_2，设在基本向量的变换 (2.2) 下得到 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，分量 $\overline{u}_1$，$\overline{u}_2$，受到相同的变换，即

$$\begin{aligned}\overline{u}_1&=p_{11}u_1+p_{12}u_3\\\overline{u}_2&=p_{21}u_1+p_{22}u_2\end{aligned} \tag{2.4}$$

时，则 u 称为**共变向量** (covariant vector)。

又有一量 v，关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的分量是 v_1，v_2，设在基本向量的变换 (2.2) 下得到 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，分量受到与 (2.3) 相同的变换时，即

$$\begin{aligned}v_1&=p_{11}\overline{v}_1+p_{21}\overline{v}_2\\v_2&=p_{12}\overline{v}_1+p_{22}\overline{v}_2\end{aligned} \tag{2.5}$$

时，则称 $\boldsymbol{v}$ 为**反变向量**(contravariant vector)。

例 向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 x_1，x_2 当然是反变向量的分量。即在这样含义下，$\boldsymbol{x}$ 是反变向量。再者对于此向量 $\boldsymbol{x}$，有一实数

$$a_1x_1+a_2x_2 \qquad (a_1,\ a_2\ \text{是常数}) \qquad (2.6)$$

与之对应，并规定这个对应与基本向量的选法无关，则关于新基本向量，$\overline{a}_1\overline{x}_1+\overline{a}_2\overline{x}_2$ 与以前的 $a_1x_1+a_2x_2$ 相等，即

$$\overline{a}_1\overline{x}_1+\overline{a}_2\overline{x}_2=a_1x_1+a_2x_2$$

将(2.3)代入此式，因 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，是任意的，故得

$$\overline{a}_1=p_{11}a_1+p_{12}a_2$$

$$\overline{a}_2=p_{21}a_1+p_{22}a_2$$

与(2.4)比较之可见，$\boldsymbol{x}$ 与实数相对应的定义式(2.6)中的 a_1，a_2 看做分量时是共变向量的分量。

其次，使用矩阵记号来表达共变向量，反变向量的变换。令

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\ \overline{U}=\begin{pmatrix}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},\ \overline{V}=\begin{pmatrix}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\end{pmatrix}$$

则(2.4)是

$$\overline{U}=PU$$

(2.5) 是 $V={}^tP\overline{V}$，故

$$\overline{V}={}^t(P^{-1})V$$

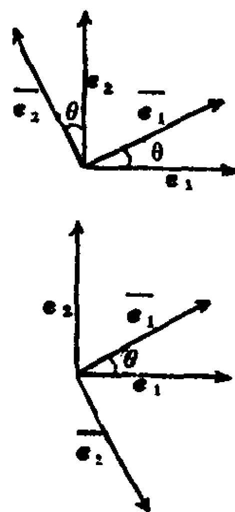
总之，共变向量的变换是 $\overline{U}=PU$

反变向量的变换是 $\overline{V}={}^t(P^{-1})V$

式中 ${}^t(P^{-1})$是 P^{-1} 的转置矩阵。

取基本向量为标准正交基时，基底的变换是

$$\begin{cases}\overline{e}_1=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2\\ \overline{e}_2=-\sin\theta\cdot e_1+\cos\theta\cdot e_2\end{cases} \qquad (2.7)$$



第 1.10 图

或

$$\begin{cases}\overline{e}_1=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2\\ \overline{e}_2=\sin\theta\cdot e_1-\cos\theta\cdot e_2\end{cases} \qquad (2.8)$$

在(2.7)的情况下，

$$P=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

是正交矩阵，

$${}^t(P^{-1})=P$$

(2.8)的情况也一样。因此，在这种情况下，共变向量的变换也好，反向变量的变换也好都一样。总之，可以说

在标准正交基下，共变，反变没有区别。

为了明确共变向量与反变向量的区别，一般是共变向量的分量和以前一样仍记做(u_1, u_2)，但反变向量的分量将其指标写在上边记做(v^1, v^2)。而基底变换的矩阵记做($p_i{}^j$)。这时，(2.2)，(2.4)，(2.5)可写做

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=\sum_j p_i{}^j\boldsymbol{e}_j,\quad \bar{u}_i=\sum_j p_i{}^j u_j,\quad v^i=\sum_j p_j{}^i\bar{v}^j\ (i=1,\ 2)\quad (2.9)$$

现在令矩阵 $P=(p_i{}^j)$ 的逆矩阵的转置为

$${}^t(P^{-1})=Q=(q_i{}^j)$$

则得

$$\bar{v}^i=\sum_j q_j{}^i v^j \qquad (2.10)$$

张　量（tensor）考虑共变向量 $u=(u_1,\ u_2)$ 与反变向量 $v=(v^1,\ v^2)$ 的分量相乘而得四数组

$$u_1v^1,\ u_1v^2,\ u_2v^1,\ u_2v^2 \qquad (2.11)$$

关于变换后的基底 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$；u，v 的分量相乘而得之积

$$\bar{u}_1\bar{v}^1,\ \bar{u}_1\bar{v}^2,\ \bar{u}_2\bar{v}^1,\ \bar{u}_2\bar{v}^2$$

与(2.11)之间有下列关系：

$$\bar{u}_i\bar{v}^j=(\sum_k p_i{}^k u_k)(\sum_h q_h{}^j v^h)=\sum_{k,h}p_i{}^k q_h{}^j u_k v^h$$

于是令

$$t_i{}^j=u_iv^j,\qquad \bar{t}_i{}^j=\bar{u}_i\bar{v}^j \qquad (2.12)$$

则

$$\bar{t}_i{}^j = \sum_{k,h} p_i{}^k q_h{}^j t_k{}^h \qquad (2).13$$

一般地说，如果有一个量 t 关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的分量以及关于 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 的分量

$$\begin{pmatrix} t_1{}^1 & t_1{}^2 \\ t_2{}^1 & t_2{}^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \bar{t}_1{}^1 & \bar{t}_1{}^2 \\ \bar{t}_2{}^1 & \bar{t}_2{}^2 \end{pmatrix}$$

之间，有（2.13）的关系时，则称此 t 为**2 阶混合张量**或（1，1）型张量。

由共变向量 u 与反变向量 v 按(2.11)方式作成的以 $t_i{}^j = u_i v^j$ 为分量的量是(1，1)型张量的特例。

同理，如果有二共变向量 u，w，设它们关于 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的分量为(u_1，u_2)，(w_1，w_2)，由此作

$$u_1 w_1,\ u_1 w_2,\ u_2 w_1,\ u_2 w_2,$$

令

$$t_{ij} = u_i w_j$$

同理关于 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 作

$$\bar{t}_{ij} = \bar{u}_i \bar{w}_j$$

可见

$$\bar{t}_{ij} = \sum_{k,h} p_i{}^k p_j{}^h t_{kh} \qquad (2.14)$$

一般地说，如果有一量 t，它关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 以及 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 的分量 (t_{ij}) 与 ($\bar{t}_{ij}$) 之间有关系(2.14)，则称此量 t 为**2 阶共变张量**或（0，2）型张量。

又如果一量 t 关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 以及 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 的分量(t^{ij})，($\bar{t}^{ij}$) 之间有如下关系

$$\bar{t}^{ij} = \sum_{k,h} q_k{}^i q_h{}^j t^{kh} \qquad (2.15)$$

时，则称 t 为**2 阶反变张量**或(2，0)型张量。

对于共变张量(t_{ij})与反变张量(t^{ij})，性质

$$t_{ij} = t_{ji},\quad t^{ij} = t^{ji} \qquad (2.16)$$

与基底的选法无关。例如当 $t_{ij}=t_{ji}$ 时，得

$$\bar{t}_{ij}=\sum_{k,h}p_i{}^k p_j{}^h t_{kh}=\sum_{k,h}p_i{}^k p_j{}^h t_{hk}=\sum_{k,h}p_j{}^h p_i{}^k t_{hk}=\bar{t}_{ji}$$

具有性质 (2.16) 的张量 (t_{ij})，(t^{ij}) 称为对称张量 (symmetric tensor)。又如

$$t_{ij}=-t_{ji},\quad t^{ij}=-t^{ji} \tag{2.17}$$

时，则称 (t_{ij})，(t^{ij}) 为反称张量 (alternate tensor, antisymmetric tensor)。

其次，设 (u^i) 为反变向量，(v_i) 为共变向量，则

$$\sum_i u^i v_i$$

是与基底的选法无关的数，即数量。此事由 (2.9)，(2.10) 可见 $\sum \bar{u}^i\bar{v}_i=\sum u^i v_i$。

又设 (u^i)，(v^i) 为反变向量，(g_{ij}) 为 (0, 2) 型张量，也容易证明

$$\sum_{i,j}g_{ij}u^i v^j$$

仍然与基底的选法无关，即为数量。多数情况下，这里的 g_{ij} 是对称张量。

当基底向量是标准正交基时，共变和反变并无区别，故对于向量 (u_i)，(v_i)；$\sum\limits_i u_i v_i$ 是数量。又如果 (g_{ij}) 为张量时，则 $\sum\limits_{i,j}g_{ij}u_i v_j$ 也是数量。

空间的情况 与平面的情况完全一样，可以定义共变向量、反变向量、张量. 3 维的特征是，关于右手系标准正交基如果 (u_i)，(v_i)，(w_i) 是向量，则

$$u_2v_3-u_3v_2,\quad u_3v_1-u_1v_3,\quad u_1v_2-u_2v_1$$

是向量的分量。此外

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

是数量也可由正交变换的性质证明。

§3 映　射

一般地说，一个多元函数的 k 阶偏导函数存在而且都连续时，则称此函数是 C^k 级的($k=1,2,3\cdots$)，任意次可微分的函数称为 C^∞ 级的，关于自变数可以展开成幂级数的函数，即解析函数称为 C^ω 级的。我们在这本书里讨论的函数大体上是 C^1 级，C^2 级，C^3 级左右的，如不加特殊声明时，假设是 C^∞ 级的。

现在有C^1级函数 $\varphi_1(x_1, x_2)$，$\varphi_2(x_1, x_2)$，可将

$$y_1=\varphi_1(x_1, x_2),\quad y_2=\varphi_2(x_1, x_2) \tag{3.1}$$

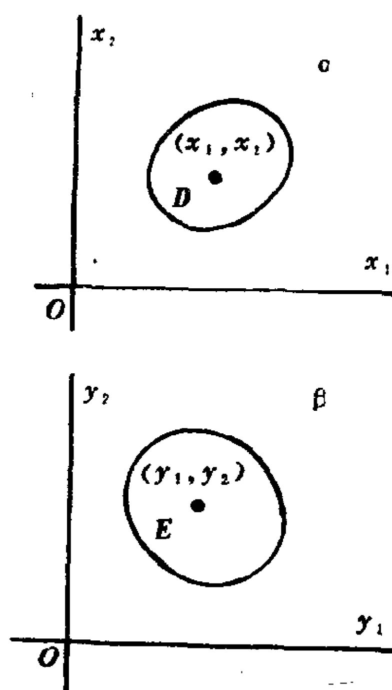
看做从 x_1,x_2 到 y_1,y_2 的变换，也可以这样想，有两个平面α,β，(3.1)将 α 平面上的点(x_1, x_2)变到 β 上的点(y_1, y_2)。现在当点(x_1, x_2)在域D里变动时，设点(y_1,y_2)在域 E上变动，则称 D 在映射(3.1)下映在 E 上。在这种情况下，D的点与E的点间的对应未必是一对一的。再考虑一个映射

$z_1=\psi_1(y_1, y_2)$，$z_2=\psi_2(y_1,y_2)$，

考虑复合映射

$$(x_1,x_2)\to(y_1,y_2)\to(z_1,z_2) \tag{3.2}$$

则 z_1，z_2 可看做 x_1，x_2 的函数。



第 1.11 图

一般说来，对于 x_1，x_2 的函数 y_1，y_2，

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\[2ex] \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}$$

称为 y_1,y_2 对 x_1,x_2 的**函数行列式**或**雅可比行列式**(Jacobian)。运用这种记号，在(3.2)的情况下有

$$\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(y_1,y_2)}\ \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} \tag{3.3}$$

今设在(3.1)下，从域D到域E的映射是C^k级，再设此对应是一对一的。反过来，将x_1，x_2看做y_1，y_2的函数，令

$$x_1=\psi_1(y_1,\ y_2),\ x_2=\psi_2(y_1,\ y_2)$$

若是这些函数还是C^k级，则映射（3.1）称为C^k**级同胚**（homeomorph）。这时考虑

$$(x_1,\ x_2)\to(y_1,\ y_2)\to(x_1,\ x_2)$$

则由(3.3)得

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\ \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)}=1$$

故

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}\neq 0,\qquad \frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\neq 0 \tag{3.4}$$

总之，在C^k级同胚映射下，(3.4)总成立。

例 1　　$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2,\quad y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2$

（a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为常数）

由此而定的对应$(x_1,\ x_2)\to(y_1,\ y_2)$，当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{3.5}$$

时，是一对一的，故是同胚。上述行列式（3.5）是$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}$。

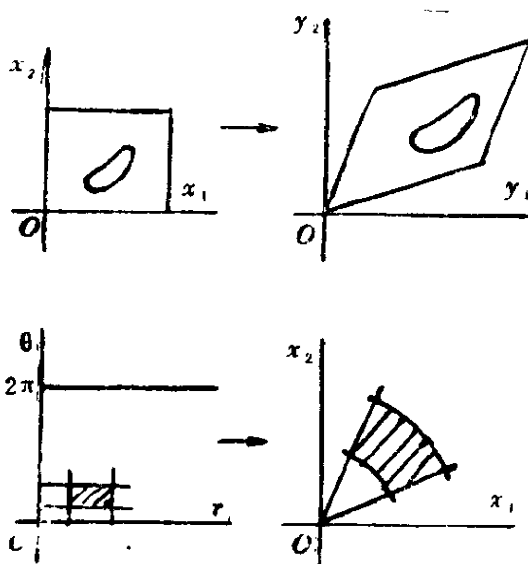
例 2　　$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta$

由此式，以(r,θ)为直角坐标的平面上 $0<r<\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 这部分同胚映射到以$(x_1,\ x_2)$为直角坐标的平面（除了原点）上。这时，

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(r,\theta)}=r>0 \tag{3.6}$$

注　在例 2 里，设 $0<r<\infty$，θ 是任意的，以(r,θ)为直角坐标的点到以(x_1,x_2)为直角坐标的平面上的映射并不是一对一的，而且

(3.6)成立。一般地说，即使映射$(x_1, x_2) \to (y_1, y_2)$是$C^k$级，(3.4)的前式成立，也不能说它是同胚的。但如限制在各点的附近，则是同胚的。例如在例 2 里，考虑$r>0$的点(r,θ)附近，则映射$(r, \theta) \to (x_1, x_2)$是同胚的。



第 1.12 图

3 维情况 以上诸性质对 3 维以上的情况也一样。3 维情况是：有C^k级函数$\varphi_i(x_1, x_2, x_3)(i=1,2,3)$，假设由$y_i=\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i=1,2,3)$而定的从空间α的域D到空间β的域E的映射$(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3)$是一对一，其逆映射也是$C^k$级。这是$C^k$级同胚映射。这时，

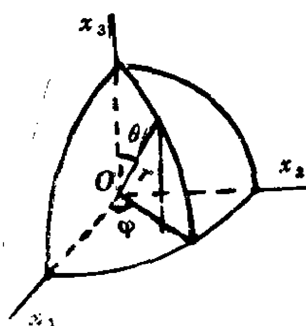
$$\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.7)$$

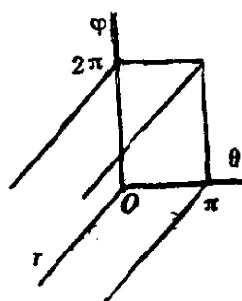
例 1 由$y_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j(i=1, 2, 3)$而定的映射$(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3)$，当系数$a_{ij}$作成的行列式$\det(a_{ij}) \neq 0$时，是同胚的。这时，

$$\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} \neq 0 .$$

例 2 在空间里，直角坐标(x_1, x_2, x_3)与球坐标(r, θ, φ)间的关系是：

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$x_3 = r\cos\theta$$





第 1.13 图

式中 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$。考虑以 (r, θ, φ) 为直角坐标的空间，则在

$$(r, \theta, \varphi)\to(x_1, x_2, x_3)$$

下，域 $r>0$，$0<\theta<\pi$，$0<\varphi<2\pi$ 同胚映射在去掉 x_3 轴与 $x_2=0(x_1>0)$ 而得的域。这时，

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2\sin\theta$$

更普遍些，在 n 维的情况下同理可考虑由

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

将 n 维空间的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变为点 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的映射。

§4 微分方程

关于微分方程，今后经常引用下列基本定理。

定理 1.1 当 $f_1(t, x_1, x_2)$，$f_2(t, x_1, x_2)$ 是 C^1 级函数时，

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \quad (4.1)$$

的解 $x_1=\varphi_1(t)$，$x_2=\varphi_2(t)$ 中满足初始条件

$$当\ t=t_0 时，x_1=c_1，x_2=c_2$$

者存在一个并且只存在一个。

这时，设定义 $f_i(t, x_1, x_2)$ 的 (t, x_1, x_2) 的域为 D。(4.1)的解在整个 D 上未必存在。定理 1.1 保证在 $t=t_0$，$x_1=c_1$，$x_2=c_2$ 附近解的存在与唯一性。但 $f_i(t, x_1, x_2)$ 具有下列特殊形状（线性）时

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2 \tag{4.2}$$

在定义 $a_{ij}(t)(i,j=1,2)$的整个 t 的区间，定理1.1成立。在这种情况下，设

当 $t=t_0$ 时，$x_1=1$，$x_2=0$ 的解为 $x_1=\varphi_{11}(t)$，$x_2=\varphi_{12}(t)$，

当 $t=t_0$ 时，$x_1=0$，$x_2=1$ 的解为 $x_1=\varphi_{21}(t)$，$x_2=\varphi_{22}(t)$，

则

当 $t=t_0$ 时，$x_1=c_1$，$x_2=c_2$ 的解为

$$x_1=c_1\varphi_{11}(t)+c_2\varphi_{21}(t),\quad x_2=c_1\varphi_{12}(t)+c_2\varphi_{22}(t)。$$

由此可得

当 $t=t_0$ 时，$x_1=0$，$x_2=0$ 的解只有 $x_1=0$，$x_2=0$。

例 试求$\frac{dx_1}{dt}=-x_2$，$\frac{dx_2}{dt}=x_1$的解

这时

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(-x_2)=-\frac{dx_2}{dt}=-x_1$$

即

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-x_1 \qquad 故 \quad x_1=c_1\cos t-c_2\sin t$$

从而

$$x_2=-\frac{dx_1}{dt}=c_1\sin t+c_2\cos t$$

即

$$\begin{cases}x_1=c_1\cos t-c_2\sin t\\ x_2=c_1\sin t+c_2\cos t\end{cases}$$

这是当 $t=0$ 时 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$ 的解。

上述性质在更普遍的情况下成立。即

定理 1.2 设 $f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 C^1 级函数，则

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.3}$$

的解 $x_i = \varphi_i(t)$ 满足初始条件

当 $t = t_0$ 时，$x_i = c_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

者只存在一组。

又在线性情况

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \ (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.4}$$

下，下列性质成立。

当 $t = t_0$ 时，$x_i = \delta_{ij}$ $(i, j=1,2,\cdots,n)$，

即

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \cdots, x_j = 1, \cdots, x_n = 0$$

的解为 $x_i = \varphi_i^{(j)}(t)$，则当 $t = t_0$ 时 $x_i = c_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的解为

$$x_i = \sum_j c_j \varphi_i^{(j)}(t) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{4.5}$$

这时，下列性质成立。

当 $t = t_0$ 时 $x_i = 0 (i=1,\cdots,n)$ 的解只有总是 $x_i = 0$ 的函数。

今后，在本书中遇到的微分方程中最重要的是，关于 k 个未知向量 $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i(t)$ 的线性微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(t) \boldsymbol{p}_j \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{4.6}$$

以 3 维空间的情况说明之，令 $\boldsymbol{p}_i$ 的分量为 (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3})，则得 $3k$ 个函数的微分方程

$$\frac{dp_{ih}}{dt} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} p_{jh} \quad (i=1,2,\cdots,k \quad h=1,2,3)$$

上述理论可以运用。即

当 $t = t_0$ 时，$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{c}_i$（已知）的(4.6)的解一定存在一组。

例 1 $$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{p}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = 0$$

满足 $t=0$ 时，$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_2$ 的解是

$$\boldsymbol{p}_1=t\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{c}_1,\quad \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_2$$

例 2 $$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}=-\boldsymbol{p}_2,\qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}=\boldsymbol{p}_1$$

满足 $t=0$ 时，$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_2$ 的解是

$$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_1\cos t-\boldsymbol{c}_2\sin t,\quad \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_1\sin t+\boldsymbol{c}_2\cos t$$

§5 外积与外微分

外积（exterior product） 有两个一次微分形式

$$\omega_1=a_1dx_1+a_2dx_2,\quad \omega_2=b_1dx_1+b_2dx_2 \tag{5.1}$$

（a_1,a_2,b_1,b_2 是 x_1,x_2 的函数）

它们的外积 $\omega_1\wedge\omega_2$ 是：关于 dx_1,dx_2 的乘法按照以下公理

$$dx_1\wedge dx_1=0,\quad dx_2\wedge dx_2=0,\quad dx_1\wedge dx_2=-dx_2\wedge dx_1 \tag{5.2}$$

计算而得之式。由(5.2)得

$$\omega_1\wedge\omega_2=(a_1b_2-a_2b_1)dx_1\wedge dx_2 \tag{5.3}$$

通过以下讨论知道，这种计算法与变数 x_1,x_2 的选法无关。今令

$$x_1=\varphi_1(y_1,y_2),\quad x_2=\varphi_2(y_1,y_2)$$

则(5.1)变为

$$\omega_1=l_1dy_1+l_2dy_2,\quad \omega_2=m_1dy_1+m_2dy_2 \tag{5.4}$$

的形状。这时，令 $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}=p_i$，$\frac{\partial x_i}{\partial y_2}=q_i$ $(i=1,2)$，则

$$l_1=a_1p_1+a_2p_2,\quad l_2=a_1q_1+a_2q_2$$

$$m_1=b_1p_1+b_2p_2,\quad m_2=b_1q_1+b_2q_2$$

按(5.3)的规律，从(5.4)计算 $\omega_1\wedge\omega_2$ 得

$$\omega_1\wedge\omega_2=(l_1m_2-l_2m_1)dy_1\wedge dy_2=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}dy_1\wedge dy_2 \tag{5.5}$$

然而

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

又因

$$dx_1 = p_1 dy_1 + q_1 dy_2, \quad dx_2 = p_2 dy_1 + q_2 dy_2$$

按(5.3)的规律计算 $dx_1 \wedge dx_2$ 得

$$dx_1 \wedge dx_2 = (p_1 q_2 - p_2 q_1) dy_1 \wedge dy_2 \tag{5.7}$$

故将 y_1, y_2 看做自变数求得的 $\omega_1 \wedge \omega_2$ (5.5) 与将 x_1, x_2 看做自变数求得的 $\omega_1 \wedge \omega_2$(5.3) 一致。这由 (5.6)，(5.7) 就可看出。

外微分 (exterior differential) 关于一次微分形式

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 \quad (a_1, a_2 \text{是} x_1, x_2 \text{的} C^1 \text{级函数}) \tag{5.8}$$

定义其外微分 $d\omega$ 为

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2 \tag{5.9}$$

由此定义得

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2$$

根据(5.2)知

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \tag{5.10}$$

特别当 ω 是 C^2 级函数 f 的全微分，即

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

时，在(5.8)里 $a_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$，$a_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$，$\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0$。

故由(5.10)得

$$d(df) = 0 \tag{5.11}$$

即

$$\text{当} \omega = df \text{时，则} d\omega = 0 \tag{5.12}$$

设 m 为 x_1, x_2 的 C^1 级函数，ω 为 C^1 级一次微分形式，则

$$d(m\omega) = dm \wedge \omega + md\omega \tag{5.13}$$

令 $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$，则此性质可证明如下。

$$\begin{aligned} d(m\omega) &= d(ma_1 dx_1 + ma_2 dx_2) \\ &= d(ma_1) \wedge dx_1 + d(ma_2) \wedge dx_2 \\ &= (dm \cdot a_1 + mda_1) \wedge dx_1 + (dm \cdot a_2 + mda_2) \wedge dx_2 \\ &= dm \wedge (a_1 dx_1 + a_2 dx_2) + m(da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2) \\ &= dm \wedge \omega + md\omega \end{aligned}$$

根据(5.11)，(5.13)可见，外微分 $d\omega$ 的定义也与自变数的选法无关，证明如下。将 $x_1 = \varphi_1(y_1, y_2)$，$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2)$代入

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 \tag{5.14}$$

里，将 y_1, y_2 看做自变数，取(5.14)的外微分则由(5.13)得

$$\begin{aligned} d\omega &= d(a_1 dx_1) + d(a_2 dx_2) \\ &= da_1 \wedge dx_1 + a_1 d(dx_1) + da_2 \wedge dx_2 + a_2 d(dx_2) \end{aligned}$$

由(5.11)知 $d(dx_1) = 0$，$d(dx_2) = 0$，故得

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + da_2 \wedge dx_2$$

积分 展布在平面域D上的积分

$$I = \iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{5.15}$$

施行换元 $x_1 = \varphi_1(y_1, y_2)$，$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2)$则得

$$I = \iint_K f(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} dy_1 dy_2$$

式中 $dx_1 dx_2$ 变为$\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} dy_1 dy_2$。它的证明在微积分里相当麻烦。如作

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2, \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2$$

的外积得

$$dx_1 \wedge dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} dy_1 \wedge dy_2$$

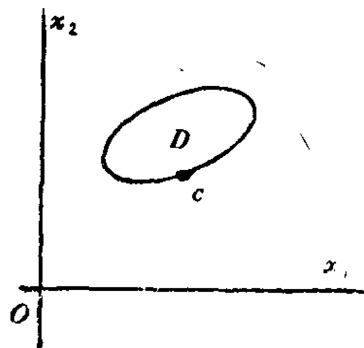
故(5.15)中的 dx_1dx_2，不如看做外积更妥当，今后就这样做。

域D上的积分与其边界 ∂D 上的线积分间的桥梁是格林定理：

$$\iint_D\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2=\int_{\partial D}(a_1dx_1+a_2dx_2)$$

将 dx_1dx_2 看做 $dx_1\wedge dx_2$，则得

$$\iint_D d\omega=\int_{\partial D}\omega \qquad (5.16)$$



第 1.14 图

特别当 $\omega=df$（全微分）时，因 $d\omega=d(df)=0$，故

$$\int_{\partial D}\omega=0$$

再者，(5.12)的逆是

当 $d\omega=0$，则 $\omega=df$（全微分）。

这个性质在所论域内各点的邻域里是正确的。但在整个域中未必存在一个函数 f。

例 $\omega=\dfrac{x_1dx_2-x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2}$ 定义在去掉原点的域里总是$d\omega=0$。在 $x_1\neq 0$ 处，$\omega=d\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\right)$，在 $x_2\neq 0$ 处，$\omega=d\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}\right)$。但在整个 D 上不存在满足 $\omega=df$ 的 f。通过以下讨论就可理解。如果存在的话，则沿闭曲线 c 的线积分$\int_c\omega$ 应恒为 0，但实际情况不是这样。沿以原点为圆心取正向一圈的圆周 c 的积分是$\int_c\omega=2\pi$。

到目前为止考虑了二变数的情况，以下叙述 n 变数 x_1，x_2，…，x_n 的情况。在计算两个一次微分形式

$\omega_1=\sum a_idx_i$，$\omega_2=\sum b_idx_i$ (a_i, b_i 是 x_1，x_2，…，x_n 的函数）的外积 $\omega_1\wedge\omega_2$ 时，设

$$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i \quad \text{特别是}\ dx_i\wedge dx_i=0 \qquad (5.17)$$

其它按照普通计算方法。于是得

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (\sum_i a_i dx_i) \wedge (\sum_j b_j dx_j) = \sum_{i,j} a_i b_j dx_i \wedge dx_j$$
$$= \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i) dx_i \wedge dx_j \quad (5.18)$$

在作三个以上 dx_i 的外积时，除了(5.17)外，再设

$$(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k = dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) \quad (5.19)$$

成立去运算。而且式子

$$\sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad \sum_{i<j<k} a_{ijk} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$$

分别称为**2 次、3 次外微分形式**(exterior differential form)。

外微分 $d\omega$ 的定义是

当 $\omega = \sum_i a_i dx_i$ 时，$\quad d\omega = \sum_i da_i \wedge dx_i \quad (5.20)$

当 $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j$ 时，$d\omega = \sum_{i<j} da_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j \quad (5.21)$

等。对于(5.20)的情况，

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

对于(5.21)的情况，

$$d\omega = \sum_{i<j<k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j$$

当 ω_1, ω_2 是一次微分形式时，可证

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2$$

为了以后使用方便，将以上得到的结论总结如下：

(1) 设 $\omega, \omega_1, \omega_2$ 为一次或二次微分形式，则

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2, \quad d(c\omega) = c d\omega \ (c \text{ 是常数})$$

(2) 设 $\omega, \omega_1, \omega_2$ 为一次微分形式，m 为函数，则

$$d(m\omega) = dm \wedge \omega + m d\omega$$
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge d\omega_2$$

(3) 设 ω 为一次微分形式，则

$$\text{当 } \omega = df \text{ 时，} \quad d\omega = 0$$

反之，当 $d\omega=0$ 时，局部地存在满足 $\omega=df$ 的函数 f。

值得注意的是：从(2)可见，如将 $m\omega$ 写作 ωm 时，

$$d(\omega m)=d\omega\cdot m-\omega\wedge dm$$

故当ω为一次微分形式，$\boldsymbol{e}$ 是以函数为分量的向量时，$\omega\boldsymbol{e}$ 的外微分（以各分量的外微分为分量的向量）满足

$$d(\omega\boldsymbol{e})=d\omega\wedge\boldsymbol{e}-\omega\wedge d\boldsymbol{e} \tag{5.22}$$

式中 $\omega\wedge d\boldsymbol{e}$ 是一个向量，它的分量是 ω 与 $d\boldsymbol{e}$ 的分量的外积。

习 题 一

1 在平面上，设基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 之长为 1，夹角为θ。试求下值。

(1) 分量为 (a_1,a_2) 的向量之长。

(2) 分量为 (a_1,a_2)，(b_1,b_2) 的向量的夹角。

(3) 以原点，二点(a_1,a_2)，(b_1,b_2)为顶点的三角形的面积。

2 在空间里，设基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的长为 1，$\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 的夹角为 α，$\boldsymbol{e}_3$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 的夹角为 β，$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 γ。试求下值。

(1) 分量为(a_1, a_2, a_3)的向量之长。

(2) 以原点，三点$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$为顶点的四面体的体积。

3 回答下列问题。$(i,j=1,2)$

(1) 当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$，$\delta_{ii}=1$ 的(δ_{ij})是共变张量的分量吗？

(2) 当 $i\neq j$ 时 $\delta_i{}^j=0$，$\delta_i{}^i=1$ 的$(\delta_i{}^j)$ 是混合张量的分量吗？

4 设(u^i)为反变向量，(v_i)，(w_i)为共变向量。问下列各分量是向量的分量还是张量的分量？

(1) u^i+v_i (2) v_i+w_i (3) u^i+v_j

(4) u^iv_j (5) v_iw_j (6) u^iv_i

5 设(g_{ij})为共变张量，(u^i)为反变向量。试证 $v_i=\sum_j g_{ij}u^j$ 为共变向量的分量。

6 已知根据 $x_1=u_1^2-u_2^2$，$x_2=2u_1u_2$ 将点(u_1,u_2)映射为点$(x_1,$

x_2)。当点(u_1,u_2)在以下直线上移动时，试问点(x_1,x_2)在什么线上移动？

(1) u_1＝一定的线　　　(2) u_2＝一定的线

(3) 通过原点的直线　　　(4) 以原点为圆心的圆

再讨论在此映射中函数行列式为0的地点。

7 已知初始条件是当 $t=0$ 时，$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_2$，试解下列向量微分方程。

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}=\boldsymbol{p}_2,\qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}=\boldsymbol{p}_1$$

8 对于下列各 ω，试求 $d\omega$。

(1) $\omega=x_1dx_2-x_2dx_1$　　　(2) $\omega=\dfrac{x_1dx_2-x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2}$

(3) $\omega=x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2$

(4) $\omega=\dfrac{x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}$

9 下列各 ω 满足 $d\omega=0$。试求满足 $\omega=df$ 的函数 f。

(1) $\omega=(3x_1^2-2x_1x_2)dx_1+(4x_2-x_1^2)dx_2$

(2) $\omega=\dfrac{x_2dx_1-x_1dx_2}{x_1^2-x_2^2}$

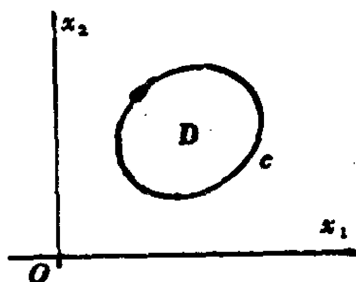
10 将格林公式应用于下列各线积分上。试问结果怎样？再考虑这些线积分在图形上的意义。

(1) $\displaystyle\int_c x_2dx_1$

(2) $\displaystyle\int_c (x_1dx_2-x_2dx_1)$

(3) $\displaystyle\int_c \pi x_2^2dx_1$

(4) $\displaystyle\int_c \frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2}$

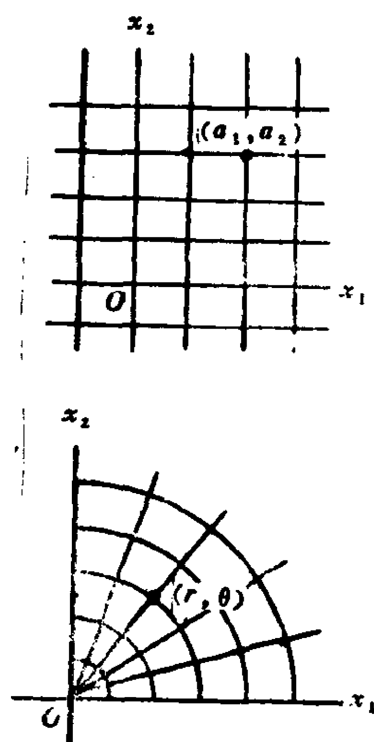


第1.15图

第二章　欧氏平面与欧氏空间

§1　曲线坐标

为在平面上决定点的位置，普通采用直角坐标。这种坐标的决定方法是：用原点和标准正交基决定坐标轴，然后决定点的坐标。直角坐标为 (a_1, a_2) 的点是直线 $x_1=a_1$ 与直线 $x_2=a_2$ 的交点。



第 2.1 图

为决定点的位置，除了直角坐标外，常用极坐标。这样坐标的决定方法是：以原点为圆心，半径 r 的圆，通过原点与极轴（x_1 轴）夹 θ 角的直线，二者的交点决定点的位置。这时，$a<r<b(a>0)$，$\alpha<\theta<\beta(\alpha>0, \beta<2\pi)$的点$(r, \theta)$的存在范围是二同心圆与二半径围成的图形，这个图形与另一平面上以(r, θ)为直角坐标的点集（矩形的内部）成一一对应。

推广这种想法，考虑更普遍的坐标。

设在平面 α 上点的直角坐标为(x_1, x_2)，在另一平面 β 上点的直角坐标为(u_1, u_2)，由

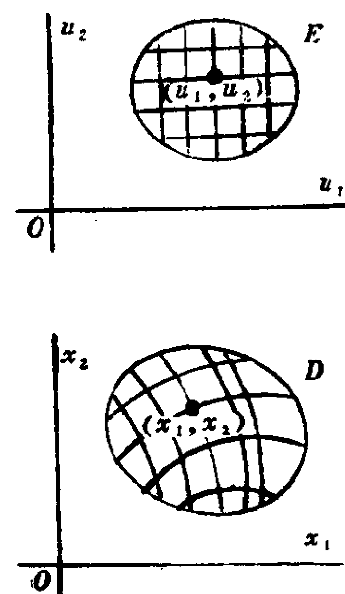
$$x_1=\varphi_1(u_1, u_2), \quad x_2=\varphi_2(u_1, u_2) \qquad (1.1)$$

将平面 β 的域E的点(u_1, u_2)对应于平面 α 的域D的点(x_1, x_2)。如果此对应是 C^k 级同胚映射（映射是一对一，(1.1)的 φ_1，φ_2以及决定其逆映射的函数都是 C^k 级），则称 u_1，u_2 为 C^k 级的**曲线坐标**(curvilinear coordinates)(可以考虑 $k=1,2,3,\cdots$ 各种情况）。

这时，(1.1)的雅可比行列式是

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1,u_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (1.2)$$

在(1.1)里让 u_1 的值一定，则随着 u_2 的值改变，点(x_1,x_2)画出曲线来。再让 u_2 的值一定，改变 u_1，则点(x_1, x_2)也画出曲线来。点(x_1, x_2)由这二曲线的交点而定。u_2 = 一定的曲线，u_1 = 一定的曲线分别称为 u_1 曲线，u_2 曲线，总称为**参数曲线** (parameter curve)。



第 2.2 图

以下使用向量记号。令点(x_1, x_2)的位置向量为 $\boldsymbol{x}$，则$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}$是参数曲线的切向量。(1.2)用外积的记号可写成

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right]\neq 0.$$

现在在平面α上考虑曲线，设其弧长的微分为 ds，则

$$ds^2=(d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x})=dx_1^2+dx_2^2$$

而且

$$d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}du_i=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}du_2$$

故

$$ds^2=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}du_2,\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}du_2\right)$$

展开之，令

$$g_{11}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\right),\ g_{12}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right),\ g_{22}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right) \qquad (1.3)$$

则

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}du_i du_j = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1 du_2 + g_{22}du_2^2 \quad (1.4)$$

特别当

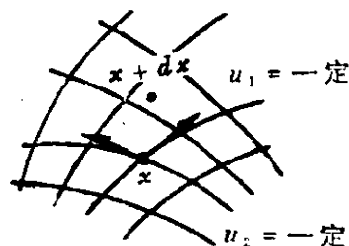
$$g_{12} = 0 \quad (1.5)$$

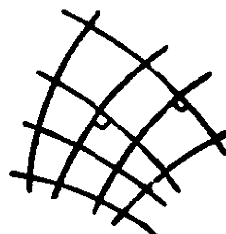
即当

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right) = 0$$

时，则参数曲线

$$u_2 = 一定，u_1 = 一定$$





第 2.3 图

的切向量$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}$互相垂直，因此，所有的参数曲线正交。这时的曲线坐标 u_1，u_2 称为**正交坐标** (orthogonal coordinates)。普通的直角坐标是正交坐标，极坐标也是正交坐标。

平面 α 上域K的面积可用$\iint_K dx_1 \wedge dx_2$表示，面积素是 $dS = dx_1 \wedge dx_2$。用变数 u_1, u_2 表示之得

$$dS = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} du_1 \wedge du_2 = \left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right] du_1 \wedge du_2$$

然而由(1.3)与第一章(1.6)知

$$\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right]\right)^2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\right) & \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right) \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\right) & \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2$$

故设

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right] > 0$$

则

$$dS=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2}\,du_1\wedge du_2 \qquad (1.6)$$

特别用正交坐标时

$$dS=\sqrt{g_{11}g_{22}}\,du_1\wedge du_2 \qquad (1.7)$$

例 1 极坐标

这时，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}=(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}=(-r\sin\theta,\ r\cos\theta)$$

故由(1.3)得

$$g_{11}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r}\right)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$g_{12}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right)=\cos\theta(-r\sin\theta)+\sin\theta\cdot r\cos\theta=0$$

$$g_{22}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta},\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}\right)=(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2=r^2$$

由(1.4)，(1.7)得

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2,\quad dS=rdr\wedge d\theta$$

例 2 椭圆坐标

设 x_1，x_2 为直角坐标，则由

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}=1 \qquad (a_1>a_2) \qquad (1)$$

表示的曲线，当常数 $\lambda<a_2$ 时，是椭圆，当 $a_1>\lambda>a_2$ 时，是双曲线。今在第一象限取定点$(x_1,\ x_2)$，则通过此点的曲线(1)有椭圆与双曲线各一条。原因是：令

$$f(\lambda)=\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}-1$$

让 λ 的值从 $-\infty$ 变到 $+\infty$，可见 $f(\lambda)=0$ 的 λ 在 $\lambda<a_2$ 的范围，

$a_1>\lambda>a_2$ 的范围各有一个。令此二根为 u_1，u_2，则

$$\frac{x_1^2}{a_1-u_1}+\frac{x_2^2}{a_2-u_1}=1,\quad \frac{x_1^2}{a_1-u_2}+\frac{x_2^2}{a_2-u_2}=1$$

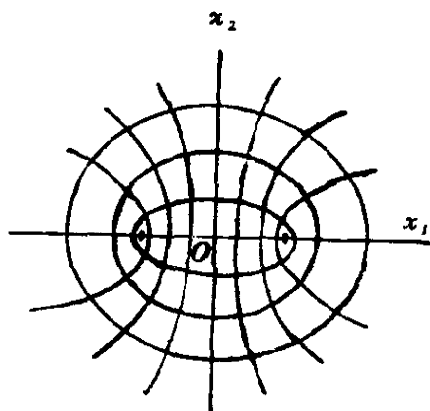
由此得

$$x_1^2=\frac{(a_1-u_1)(a_1-u_2)}{a_1-a_2},\quad x_2^2=\frac{(a_2-u_1)(a_2-u_2)}{a_2-a_1} \qquad (2)$$

这时的 u_1，u_2 称为点(x_1, x_2)的**椭圆坐标**。由此式计算 $ds^2=dx_1^2+dx_2^2$ 如下。先求(2)的对数微分得

$$2\frac{dx_1}{x_1}=-\left(\frac{du_1}{a_1-u_1}+\frac{du_2}{a_1-u_2}\right)$$

$$2\frac{dx_2}{x_2}=-\left(\frac{du_1}{a_2-u_1}+\frac{du_2}{a_2-u_2}\right)$$



第 2.4 图

将这些式子平方之，乘以(2)并相加得

$$ds^2=\frac{1}{4}\left(\frac{u_2-u_1}{(a_1-u_1)(a_2-u_1)}du_1^2+\right.$$

$$\left.+\frac{u_1-u_2}{(a_1-u_2)(a_2-u_2)}du_2^2\right)$$

故(1.5)成立，即椭圆坐标 u_1，u_2 是正交坐标。这说明 $u_1=$一定表示的椭圆与 $u_2=$一定表示的双曲线正交。

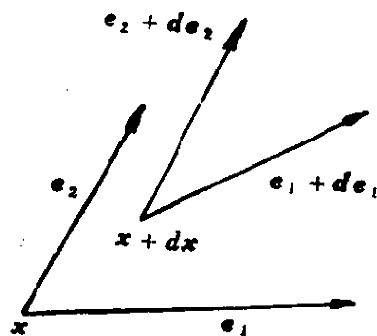
再由(1.7)得

$$dS=\frac{1}{4}\frac{|u_1-u_2|}{\sqrt{-(a_1-u_1)(a_2-u_1)(a_1-u_2)(a_2-u_2)}}du_1\wedge du_2$$

§2 活动标架

如前所示，使用曲线坐标表示平面上的点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$，计算线素 ds 时，向量 $\partial\boldsymbol{x}/\partial u_1$，$\partial\boldsymbol{x}/\partial u_2$ 是基本的。这些向量随点 $\boldsymbol{x}$ 的位置而定，若点变化，一般也变化。即在各点决定一组。以下想推广这样事实。

在平面上各点 $\boldsymbol{x}$ 决定一组基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，假设这些向量关于点 $\boldsymbol{x}$ 的曲线坐标(u_1, u_2)是 C^2 级的。这时考虑以 $\boldsymbol{x}$ 为原点，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基底的坐标系，称之为**标架**(frame)。于是，以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基底表示 $d\boldsymbol{x}$，令



第 2.5 图

$$d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2$$

则 ω_1，ω_2 是 du_1，du_2 的一次式(一次微分形式)。原因如下。首先，

$$d\boldsymbol{x}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_2}du_2$$

令
$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_i}=p_{1i}\boldsymbol{e}_1+p_{2i}\boldsymbol{e}_2\quad(i=1,\ 2)$$

则得
$$d\boldsymbol{x}=(p_{11}du_1+p_{12}du_2)\boldsymbol{e}_1+(p_{21}du_1+p_{22}du_2)\boldsymbol{e}_2$$

再令 $\omega_i=\sum_j p_{ij}du_j\quad(i=1,\ 2)$即得。

同理考虑 $d\boldsymbol{e}_1$，$d\boldsymbol{e}_2$ 可得

$$d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2,\quad d\boldsymbol{e}_1=\omega_{11}\boldsymbol{e}_1+\omega_{12}\boldsymbol{e}_2,\quad d\boldsymbol{e}_2=\omega_{21}\boldsymbol{e}_1+\omega_{22}\boldsymbol{e}_2\tag{2.1}$$

这种ω_i，$\omega_{ij}(i,\ j=1,\ 2)$称为关于标架 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的**相对分量**(relative component)。

于是令

$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\quad(i=1,\ 2)\tag{2.2}$$

则欧氏平面的线素

$$ds^2=(d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x})=\left(\sum_i\omega_i\boldsymbol{e}_i,\quad\sum_j\omega_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j}\omega_i\omega_j(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$$

变成

$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}\omega_i\omega_j\tag{2.3}$$

而在 ω_{ij} 与 g_{ij} 之间有下列关系。微分(2.2)的两边得

$$dg_{ij}=(d\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)+(\boldsymbol{e}_i,\ d\boldsymbol{e}_j)$$

将(2.1)代入此式得

$$dg_{ij}=(\sum_k\omega_{ik}\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{e}_j)+(\boldsymbol{e}_i,\ \sum_k\omega_{jk}\boldsymbol{e}_k)$$

再根据$(\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{e}_j)=g_{kj}$，$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_k)=g_{ik}$，可见

$$dg_{ij}=\sum_k g_{kj}\omega_{ik}+\sum_k g_{ik}\omega_{jk} \tag{2.4}$$

这就是所求的关系。

以下叙述最常用的特殊标架。

自然标架 这时，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 关于曲线坐标 u_1，u_2 是

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_1},\qquad \boldsymbol{e}_2=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial u_2}$$

$$d\boldsymbol{x}=du_1\boldsymbol{e}_1+du_2\boldsymbol{e}_2$$

在§1里采用的就是这种。这时，

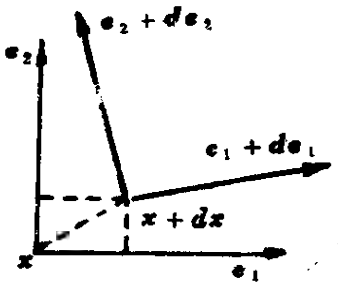
$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}du_idu_j \tag{2.5}$$

正交标架 这时，在各点取单位正交的 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为标架。因

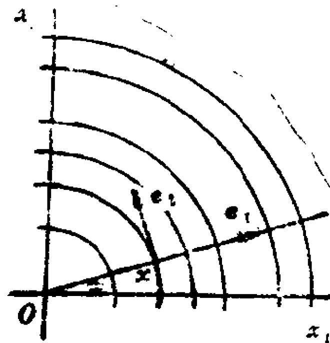
$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij} \tag{2.6}$$

故(2.3)变为

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2 \tag{2.7}$$



第 2.6 图



第 2.7 图

又(2.4)变为

$$0=\sum_k\delta_{kj}\omega_{ik}+\sum_k\delta_{ik}\omega_{jk}$$

即 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$

因此 $\omega_{11}=0$, $\omega_{22}=0$, $\omega_{12}=-\omega_{21}$

故得 $d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2$, $d\boldsymbol{e}_1=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2$, $d\boldsymbol{e}_2=-\omega_{12}\boldsymbol{e}_1$ (2.8)

例 极坐标的情况

这时，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

在自然标形下，$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial r}=(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}=(-r\sin\theta, r\cos\theta)$$

故 $d\boldsymbol{e}_1=(-\sin\theta d\theta, \cos\theta d\theta)$

$$d\boldsymbol{e}_2=(-dr\sin\theta-r\cos\theta d\theta, dr\cos\theta-r\sin\theta d\theta)$$

用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合表示之得

$$d\boldsymbol{e}_1=r^{-1}d\theta\cdot\boldsymbol{e}_2,\quad d\boldsymbol{e}_2=-rd\theta\cdot\boldsymbol{e}_1+r^{-1}dr\boldsymbol{e}_2$$

即

$$\omega_{11}=0,\quad \omega_{12}=r^{-1}d\theta,\quad \omega_{21}=-rd\theta,\quad \omega_{22}=r^{-1}dr \qquad (2.9)$$

如果不用上述 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，而用正交标架

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial r}=(\cos\theta, \sin\theta),\qquad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{r}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}=(-\sin\theta, \cos\theta)$$

则 $d\boldsymbol{x}=(dr\cos\theta-r\sin\theta d\theta, dr\sin\theta+r\cos\theta d\theta)$

$$d\boldsymbol{e}_1=(-\sin\theta d\theta, \cos\theta d\theta),$$

$$d\boldsymbol{e}_2=(-\cos\theta d\theta, -\sin\theta d\theta)$$

故得

$$d\boldsymbol{x}=dr\boldsymbol{e}_1+rd\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$d\boldsymbol{e}_1=d\theta\boldsymbol{e}_2$$

$$d\boldsymbol{e}_2=-d\theta\boldsymbol{e}_1$$

因此 $\omega_1=dr$, $\omega_2=rd\theta$, $\omega_{12}=d\theta$ (2.10)

向量场的共变微分 在平面上每个点 $\boldsymbol{x}$ 各规定一个向量 $\boldsymbol{v}$ 时，称 $\boldsymbol{v}$ 为**向量场**。

现在考虑在各点 $\boldsymbol{x}$ 的标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，关于此标架，将点 $\boldsymbol{x}$ 处的 $\boldsymbol{v}$ 分解为分量，令

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2$$

这时，使用(2.1)计算 $\boldsymbol{v}$ 的微分 $d\boldsymbol{v}$，则得

$$d\boldsymbol{v} = d\left(\sum_i v_i\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_i dv_i\cdot\boldsymbol{e}_i + \sum_i v_i d\boldsymbol{e}_i$$

$$= \sum_i dv_i\cdot\boldsymbol{e}_i + \sum_{i,j} v_i\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j = \sum_i dv_i\boldsymbol{e}_i + \sum_{j,i} v_j\omega_{ji}\boldsymbol{e}_i$$

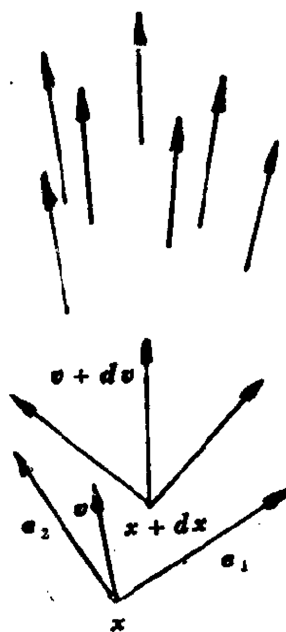
$$= \sum_i \left(dv_i + \sum_j v_j\omega_{ji}\right)\boldsymbol{e}_i$$

于是令

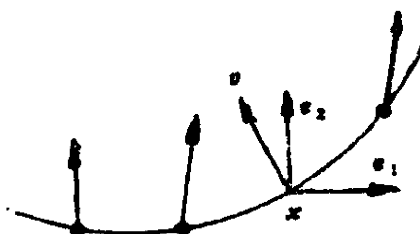
$$Dv_i = dv_i + \sum_{j=1}^{2} v_j\omega_{ji} \quad (i = 1,\ 2) \qquad (2.11)$$

则得

$$d\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{2} Dv_i\cdot\boldsymbol{e}_i = Dv_1\boldsymbol{e}_1 + Dv_2\boldsymbol{e}_2 \qquad (2.12)$$



第 2.8 图



第 2.9 图

称此 Dv_1，Dv_2 为 $\boldsymbol{v} = (v_1,\ v_2)$的**共变微分**(covariant differential) 或**绝对微分**。

考虑向量场 $\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2)$ 的微分时，在图形上 dv_1，dv_2 并没有意义。给它们加上补正项而得(2.11)的 Dv_i 有意义。例如，当 $\boldsymbol{v}$ 是平行向量场时，$d\boldsymbol{v}=0$。故由(2.12)知 $Dv_1=0$，$Dv_2=0$，然因 v_1，v_2 未必是常数，故一般 $dv_1=0$，$dv_2=0$并不成立。

到目前为止将 $\boldsymbol{v}$ 看做向量场，即在平面上的各点 $\boldsymbol{x}$ 有定义，但上述考虑不是向量场也可以。例如，在曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$上各点规定向量 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ 来考虑也完全一样。这时，点 $\boldsymbol{x}$ 的曲线坐标 u_1,u_2 都是 t 的函数，故沿此曲线，相对分量 ω_i，ω_{ij} 是

$$\omega_i=\alpha_i(t)dt,\quad \omega_{ij}=\alpha_{ij}(t)dt \qquad (i,\ j=1,\ 2)$$

的形状。因此

$$Dv_i=dv_i+\sum_j \alpha_{ji}v_j dt$$

是沿着这条曲线，$\boldsymbol{v}=(v_1,\ v_2)$的共变微分。

特别当 $\boldsymbol{v}$ 是曲线 $\boldsymbol{x}(t)$的切向量

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2,$$

又当曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 是直线时，若 t 为长度，则 $\boldsymbol{v}$ 沿此曲线一定，故得

$$Dv_i=0 \quad 即 \quad \frac{dv_i}{dt}+\sum_j \alpha_{ji}v_j=0 \quad (i=1,\ 2)$$

例 极坐标的情况

如果用自然标架，则

$$\omega_1=dr,\qquad \omega_2=d\theta$$

再由(2.9)得

$$\omega_{11}=0,\ \omega_{12}=r^{-1}d\theta,\ \omega_{21}=-rd\theta,\ \omega_{22}=r^{-1}dr$$

在这种自然标架下，$\boldsymbol{e}_1$ 是极向径方向的单位向量，$\boldsymbol{e}_2$ 是幅角方向的长为 r 的向量。关于此二向量，设一向量场 $\boldsymbol{v}$ 的分量为 v_1，v_2，则由(2.11)得绝对微分

$$\left.\begin{aligned}Dv_1&=dv_1+v_1\omega_{11}+v_2\omega_{21}=dv_1-v_2rd\theta\\ Dv_2&=dv_2+v_1\omega_{12}+v_2\omega_{22}=dv_2+v_1r^{-1}d\theta+v_2r^{-1}dr\end{aligned}\right\}(2.13)$$

又对于以 t 为参数的曲线

$$r=r(t),\quad \theta=\theta(t),$$

由 $d\boldsymbol{x}=dr\boldsymbol{e}_1+d\theta\boldsymbol{e}_2$知

$$v_1=\dot{r}=\frac{dr}{dt},\qquad v_2=\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$$

是切向量关于自然标架的分量。故由(2.13)得切向量的共变导数是：

$$\frac{Dv_1}{dt}=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\qquad \frac{Dv_2}{dt}=\ddot{\theta}+2r^{-1}\dot{r}\dot{\theta}$$

故直线的微分方程为

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0,\quad \ddot{\theta}+2r^{-1}\dot{r}\dot{\theta}=0$$

再取正交标架使 $\boldsymbol{e}_1$ 与自然标架的 $\boldsymbol{e}_1$ 相同，则

$$v_1=\dot{r},\qquad v_2=r\dot{\theta}.$$

拉氏算子 有函数 $f=f(x_1,x_2)$，设关于正交标架

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2 \tag{2.14}$$

则可令[1]

$$df=f_1\omega_1+f_2\omega_2 \tag{2.15}$$

这时，再令[2]

$$\rho=-f_2\omega_1+f_1\omega_2 \tag{2.16}$$

容易理解这和正交标架的旋转无关[3]。求其外微分 $d\rho$，令

$$d\rho=g\omega_1\wedge\omega_2 \tag{2.17}$$

则此 g 只依赖于 f，而与正交标架的选法无关[4]。称此 g 为 f 的**拉氏算子**(Laplacian)，记做 Δf。例如，关于直角坐标 x_1，x_2，

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2$$

令 $\omega_1=dx_1$，$\omega_2=dx_2$，则从

$$df=f_1dx_1+f_2dx_2 \text{ 得 } f_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

故

$$\rho=-\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_2$$

---

1) 从$df=(\nabla f,d\boldsymbol{x})$，$d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2$ 可见，f_1，f_2 是 f 的梯度关于正交标架的分量。

2) 下面的 $\rho=*df.*$ 的定义见 p. 186.

3)，4) 证明与三维情况同，见 p. 45. (以上均系译者注)

从而

$$d\rho=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)dx_1\wedge dx_2$$

因 $\omega_1\wedge\omega_2=dx_1\wedge dx_2$，故

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \tag{2.18}$$

再关于极坐标 r，θ 讨论之，因

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

故令 $\omega_1=dr$，$\omega_2=rd\theta$，则从

$$df=f_1\cdot dr+f_2\cdot rd\theta \text{ 得 } f_1=\frac{\partial f}{\partial r},\ f_2=\frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial\theta}\ ,$$

从而

$$\rho=-\frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial\theta}dr+\frac{\partial f}{\partial r}rd\theta$$

$$d\rho=\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}r\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right\}dr\wedge d\theta$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)dr\wedge rd\theta$$

因 $\omega_1\wedge\omega_2=dr\wedge rd\theta$，故得

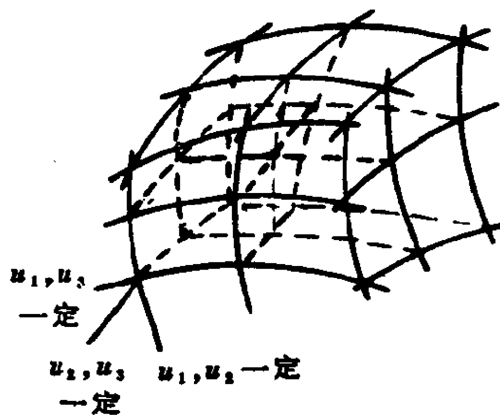
$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \tag{2.19}$$

（2.18）与（2.19）是相同的量，即 f 的拉氏算子在直角坐标下是(2.18)，在极坐标下是(2.19)。

§3 空间的曲线坐标

和欧氏平面的情况一样，在欧氏空间里也可考虑曲线坐标。首先，在空间 β 里设点的坐标为 (u_1, u_2, u_3)，考虑域 G。今有 C^∞ 级函数 $\varphi_i(u_1, u_2, u_3)(i=1, 2, 3)$，设由

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\varphi_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2=\varphi_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3=\varphi_3(u_1, u_2, u_3) \end{array}\right\}(3.1)$$



第 2.10 图

定义的从空间 β 里的点(u_1, u_2, u_3)到空间 α 里的点(x_1, x_2, x_3)的对应是一对一，又设从 x_1, x_2, x_3 到 u_1, u_2, u_3 的映射也是 C^k 级，则

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.2)$$

这样的 u_1, u_2, u_3 称为空间的点的**曲线坐标**。

这时，令 u_2=一定，u_3=一定，而改变 u_1 的值，则由(3.1)决定的点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$画曲线，称之为 u_1 曲线。此曲线的切向量可用$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}$表示。同理，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3}$分别是 u_2 曲线，u_3 曲线的切向量，(3.2)可写做

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_3}\right) \neq 0$$

于是令

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

则
$$d\boldsymbol{x}=\sum_i \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i} du_i=\sum_i \boldsymbol{e}_i du_i$$

再令
$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \qquad (3.3)$$

则由

$$ds^2=(d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x})=(\sum_i du_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_j du_j\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i,j}(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)du_idu_j$$

得
$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}du_idu_j \tag{3.4}$$

称(g_{ij})为关于此曲线坐标 u_1，u_2，u_3 的**基本张量**．特别当

$$g_{12}=0,\quad g_{13}=0,\quad g_{23}=0 \tag{3.5}$$

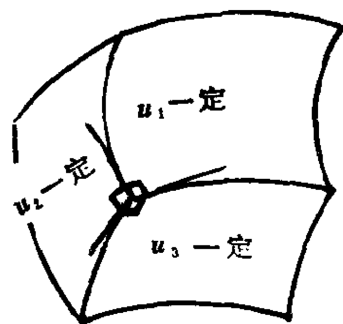
时，u_1 曲线，u_2 曲线，u_3 曲线的切向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 互相垂直。这样曲线坐标称为**正交坐标**。在正交坐标下

u_1 = 一定的曲面

u_2 = 一定的曲面

u_3 = 一定的曲面

是两两正交的。



第 2.11 图

一般地说，以三向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为三邻边的平行六面体的体积是$|(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)|$，运用内积 $g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$，由第一章(1.5) 知此体积等于行列式 $g=\det(g_{ij})$的平方根$\sqrt{g}$。今在曲线坐标下，沿 u_1 曲线，u_1 变到 $u_1+\Delta u_1$ 时 $\boldsymbol{x}$ 的微小变化略等于

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\Delta u_1=\boldsymbol{e}_1\Delta u_1$$

同理，沿 u_2 曲线，u_3 曲线，$\boldsymbol{x}$ 的微小变化略等于 $\boldsymbol{e}_2\Delta u_2$，$\boldsymbol{e}_3\Delta u_3$，由此三向量作成的平行六面体的体积是

$$|(\boldsymbol{e}_1\Delta u_1,\ \boldsymbol{e}_2\Delta u_2,\ \boldsymbol{e}_3\Delta u_3)|=|(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)|\Delta u_1\Delta u_2\Delta u_3$$
$$=\sqrt{g}\,\Delta u_1\Delta u_2\Delta u_3$$

由此可见，线素由(3.4)表示的欧氏空间的体积素是

$$dV=\sqrt{g}\,du_1\wedge du_2\wedge du_3\quad (g=\det(g_{ij})) \tag{3.6}$$

特别在正交坐标下，$g=g_{11}g_{22}g_{33}$，故

$$dV=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\ du_1\wedge du_2\wedge du_3 \tag{3.7}$$

例 1 空间极坐标（球坐标）

在空间里，关于直角坐标系 $0-x_1x_2x_3$ 考虑点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 的位置时，取

$|\boldsymbol{x}|=r$

$\theta=\boldsymbol{x}$ 与 x_3 轴的夹角$(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

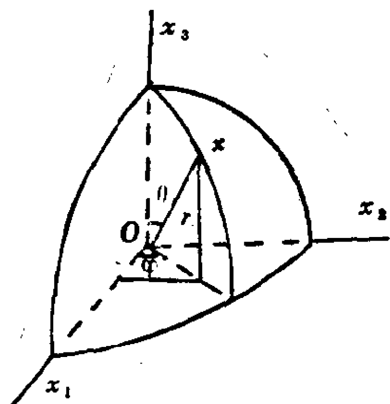
$\varphi=\boldsymbol{x}$ 在 x_1x_2 平面上的正射影与 x_1 轴的夹角$(0\leqslant\varphi<2\pi)$

则 r，θ，φ 是空间的极坐标（或球坐标）。这时

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi$$

$$x_2=r\sin\theta\sin\varphi$$

$$x_3=r\cos\theta$$



第 2.12 图

令 $r=u_1$，$\theta=u_2$，$\varphi=u_3$，由上式将域 $0<r<\infty$，$0<\theta<\pi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$ 与空间里去掉 x_3 轴剩下那部分域成一一对应。因此$(r,\ \theta,\ \varphi)$可看做点的曲线坐标，称为**球坐标**。

因为 $\boldsymbol{x}=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$

所以
$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial r}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)\\ \boldsymbol{e}_2&=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}=(r\cos\theta\cos\varphi,r\cos\theta\sin\varphi,-r\sin\theta)\\ \boldsymbol{e}_3&=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\varphi}=(-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0)\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

由此得

$$g_{11}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1)=1,g_{22}=(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2)=r^2,g_{33}=(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)=r^2\sin^2\theta$$

$$g_{12}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)=0,\ g_{23}=(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=0,g_{31}=(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1)=0$$

故球坐标是正交坐标，

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2\tag{3.9}$$

再根据(3.7)得体积素

$$dV = r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi \qquad (3.10)$$

例 2 椭球坐标

在空间里的椭球坐标定义如下。关于直角坐标 x_1，x_2，x_3，

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=1 \quad (a_1>a_2>a_3) \qquad (1)$$

表示的曲面

当 $\lambda<a_3$ 时，是椭球面；

当 $a_3<\lambda<a_2$ 时，是单叶双曲面；

当 $a_2<\lambda<a_1$ 时，是双叶双曲面；

当 $\lambda>a_1$ 时，什么也不表达。

今在第一卦限，即在

$$x_1>0, \qquad x_2>0, \qquad x_3>0$$

那部分空间的任意点 (x_1, x_2, x_3)，和平面上的椭圆坐标的情况($p.31$)一样可证，(1)的曲面有三个通过此点：就是上述的椭球面，单叶双曲面，双叶双曲面。设对应于这些面的 λ 值分别为 u_1, u_2, u_3，则

$$x_1^2=\frac{(a_1-\nu_1)(a_1-u_2)(a_1-u_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$$

$$x_2^2=\frac{(a_2-u_1)(a_2-u_2)(a_2-u_3)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}$$

$$x_3^2=\frac{(a_3-u_1)(a_3-u_2)(a_3-u_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

由此得

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=\frac{1}{4}\left(\frac{(u_2-u_1)(u_3-u_1)}{(a_1-u_1)(a_2-u_1)(a_3-u_1)}du_1^2\right.$$

$$+\frac{(u_3-u_2)(u_1-u_2)}{(a_1-u_2)(a_2-u_2)(a_3-u_2)}du_2^2$$

$$\left.+\frac{(u_1-u_3)(u_2-u_3)}{(a_1-u_3)(a_2-u_3)(a_3-u_3)}du_3^2\right) \qquad (3.11)$$

故椭球坐标是正交坐标。

活动标架　对于空间每个点 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$，各规定一组标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$。这时，使用曲线坐标 u_1，u_2，u_3，则

$$d\boldsymbol{x} = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i} du_i$$

于是令

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i} = \sum_j p_{ij}\boldsymbol{e}_j, \qquad \omega_i = \sum_j du_j \cdot p_{ji}$$

则得
$$d\boldsymbol{x} = \sum_i \omega_i \boldsymbol{e}_i \tag{3.12}$$

这时，令
$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \ \boldsymbol{e}_j)$$

则
$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\omega_i\omega_j \tag{3.13}$$

再令
$$d\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (i=1,2,3) \tag{3.14}$$

与(2.4)同理可证

$$dg_{ij} = \sum_k g_{kj}\omega_{ik} + \sum_k g_{ik}\omega_{jk} \tag{3.15}$$

自然标架是 $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}$ $(i=1,2,3)$ 的情况，这时

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}du_idu_j \tag{3.16}$$

在正交标架下，$(\boldsymbol{e}_i, \ \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$，故 (3.13)变为

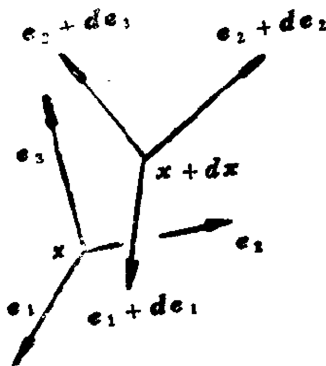
$$ds^2 = \sum_i \omega_i^2 \tag{3.17}$$

再由(3.15)得

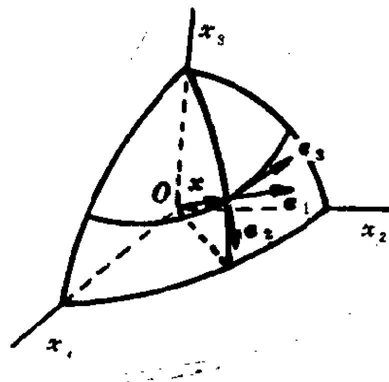
$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{3.18}$$

故 $\omega_{ii}=0$。(3.12)，(3.14)变为

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_1 &= \qquad\quad \omega_{12}\boldsymbol{e}_2 + \omega_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_2 &= -\omega_{12}\boldsymbol{e}_1 \qquad + \omega_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ d\boldsymbol{e}_3 &= -\omega_{13}\boldsymbol{e}_1 - \omega_{23}\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$



第 2.13 图



第 2.14 图

这时

$$\begin{aligned} \omega_i &= (d\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_i) \\ \omega_{ij} &= (d\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j) \end{aligned} \tag{3.20}$$

例 球坐标的情况

由(3.8)知

$$\boldsymbol{x} = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

令
$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r},\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{r}\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta},\ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{r\sin\theta}\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi}$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \\ \boldsymbol{e}_2 &= (\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta) \\ \boldsymbol{e}_3 &= (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) \end{aligned}$$

是正交标架。而且

$$d\boldsymbol{x} = dr\cdot\boldsymbol{e}_1 + rd\theta\cdot\boldsymbol{e}_2 + r\sin\theta d\varphi\cdot\boldsymbol{e}_3$$

由(3.19)得

$$\omega_1 = dr,\ \omega_2 = rd\theta,\ \omega_3 = r\sin\theta d\varphi$$

再由(3.20)得

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = d\theta,\quad \omega_{13} = -\omega_{31} = \sin\theta d\varphi,\quad \omega_{23} = -\omega_{32} = \cos\theta d\varphi$$

拉氏算子 有函数 $f = f(x_1, x_2, x_3)$，设关于正交标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \tag{3.21}$$

则可令1)

$$df = f_1\omega_1 + f_2\omega_2 + f_3\omega_3 \tag{3.22}$$

这时，令2)

$$\Omega = f_1\omega_2 \wedge \omega_3 + f_2\omega_3 \wedge \omega_1 + f_3\omega_1 \wedge \omega_2 \tag{3.23}$$

再取其外微分，并令

$$d\Omega = g\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \tag{3.24}$$

g 称为 f 的**拉氏算子**，以 Δf 表示。

这时，Δf 与正交标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的选法无关，可证明如下。设(p_{ij})为正交矩阵，并设

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}\boldsymbol{e}_j \qquad (i = 1, 2, 3)$$

则

$$d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} \bar{\omega}_i \bar{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \boldsymbol{e}_i$$

$$\bar{\omega}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}\omega_j$$

再从 $df = \sum_i \bar{f}_i \bar{\omega}_i = \sum_i f_i \omega_i$ 得 $\bar{f}_i = \sum_j p_{ij} f_j$

故通过计算可证

$$\begin{aligned} &\bar{f}_1\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_3 + \bar{f}_2\bar{\omega}_3 \wedge \bar{\omega}_1 + \bar{f}_3\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2 \\ &= \varepsilon(f_1\omega_2 \wedge \omega_3 + f_2\omega_3 \wedge \omega_1 + f_3\omega_1 \wedge \omega_2) \\ &(\varepsilon = \det(p_{ij}) = \pm 1) \end{aligned} \tag{3.25}$$

此外

---

1) $(f_1, f_2, f_3,)$是梯度 ∇f 在$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$上的分量。

2) $\Omega = {*df}$。(均系译者注)

$$\overline{\omega}_1\wedge\overline{\omega}_2\wedge\overline{\omega}_3=\varepsilon\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3 \qquad (3.26)$$

由(3.25)，(2.26)与(3.24)可见，$\varDelta f$ 与正交标架的选法无关。

例如，对于直角坐标 x_1，x_2，x_3，

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

由于 $\omega_1=dx_1$，$\omega_2=dx_2$，$\omega_3=dx_3$，故从

$$df=f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3 \text{ 得 } f_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad f_3=\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

故

$$\Omega=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_2\wedge dx_3+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_3\wedge dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_1\wedge dx_2$$

从 $d\Omega=\varDelta f dx_1\wedge dx_2\wedge dx_2$ 得

$$\varDelta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \qquad (3.27)$$

再对于球坐标，

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

故得

$$\omega_1=dr,\quad \omega_2=rd\theta,\quad \omega_3=r\sin\theta d\varphi$$

则

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2$$

令

$$df=f_1\omega_1+f_2\omega_2+f_3\omega_3,$$

与

$$df=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi$$

比较之得

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial r},\quad f_2=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta},\quad f_3=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

故

$$\Omega=f_1\omega_2\wedge\omega_3+f_2\omega_3\wedge\omega_1+f_3\omega_1\wedge\omega_2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} r^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} r \sin\theta d\varphi \wedge dr$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} r dr \wedge d\theta$$

$$d\Omega = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\right\} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

此式与

$$d\Omega = \varDelta f \cdot \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \varDelta f \cdot r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

比较之得

$$\varDelta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{3.28}$$

§4 结构方程

在空间里，设以点 $\boldsymbol{x}$ 为原点的标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ （不要求是正交标架）关于 $k(k=1, 2, \cdots)$个变数 t_1，$\cdots, t_k$ 是 C^2 级的。而且令

$$d\boldsymbol{x} = \sum_i \omega_i \boldsymbol{e}_i \tag{4.1}$$

$$d\boldsymbol{e}_i = \sum_j \omega_{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{4.2}$$

则 ω_i，ω_{ij} 是关于 t_1，$\cdots$，t_k 的一次微分形式。ω_i，ω_{ij} 称为**相对分量** (relative component)。

在相对分量之间成立某些关系。以下求之。

首先，外微分(4.1)的两边。这时，将以一次微分形式为分量的

向量外微分的含义是将其各分量外微分。于是运用第一章(5.22)得

$$d(d\boldsymbol{x}) = \sum_i d(\omega_i \boldsymbol{e}_i) = \sum_i (d\omega_i \boldsymbol{e}_i - \omega_i \wedge d\boldsymbol{e}_i)$$

此式左边是 0，再将(4.2)代入右边得

$$0 = \sum_i (d\omega_i \boldsymbol{e}_i - \omega_i \wedge \sum_j \omega_{ij} \boldsymbol{e}_j) = \sum_i (d\omega_i - \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}) \boldsymbol{e}_i$$

故

$$d\omega_i - \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} = 0$$

同理，外微分(4.2) 得

$$d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = 0$$

总之，

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \qquad (4.3)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad (4.4)$$

这些式子称为空间的**结构方程**(structure equation)。

特别当 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为正交标架时，得到与(3.18)一样的

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \qquad (4.5)$$

故(4.3)，(4.4)变为

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_3 \wedge \omega_{32}$$
$$d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} \qquad (4.6)$$

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \quad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}, \quad d\omega_{31} = \omega_{32} \wedge \omega_{21} \qquad (4.7)$$

平面上的情况 在平面 α 上取点 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，而取 $\boldsymbol{e}_3$ 的方向一定时，从 (4.1)，(4.2) 可见， $\omega_3 = 0$， $\omega_{31} = 0$， $\omega_{32} = 0$；再从(4.3)，(4.4) 得

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_{11} + \omega_2 \wedge \omega_{21}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_2 \wedge \omega_{22}$$
$$d\omega_{11} = \omega_{12} \wedge \omega_{21}, \quad d\omega_{12} = \omega_{11} \wedge \omega_{12} + \omega_{12} \wedge \omega_{22}$$
$$d\omega_{21} = \omega_{21} \wedge \omega_{11} + \omega_{22} \wedge \omega_{21}, \quad d\omega_{22} = \omega_{21} \wedge \omega_{12}$$

特别是正交标架时，

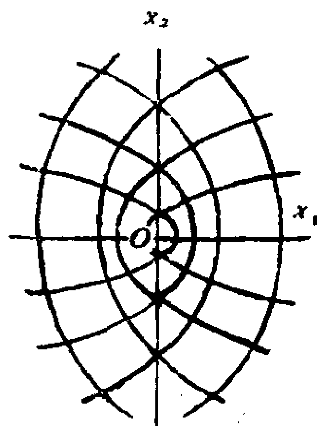
$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_{12} = 0$$

习　题　二

1　在平面上，关于直角坐标 x_1，x_2，

$$x_2^2 = 4u(x_1 + u) \quad (u \neq 0)$$

表示抛物线。设 (x_1, x_2) 是不在坐标轴上的点。试证在这类抛物线中有两个通过此点。设这时 u 的两个值为 u_1，u_2，则对于第一象限的点 (x_1, x_2)，u_1，u_2 可看做曲线坐标。试求这时的线素 ds^2（称此坐标为**抛物坐标**）。



第 2.15 图

2　在平面上，设从一点 P 到两定点 $A(-a, 0)$，$B(a, 0)$ 的距离之和为 u_1，距离之差为 u_2，则在第一象限上 u_1，u_2 可看做点 P 的曲线坐标。试用 u_1，u_2 表示这种情况下的 ds^2。

3　在平面上，当线素在正交坐标下可表示为

$$ds^2 = (c_1 du_1)^2 + (c_2 du_2)^2 \quad (c_1, c_2 \text{ 为 } u_1, u_2 \text{ 的函数})$$

时，函数 $f(u_1, u_2)$ 的拉氏算子 Δf 可由下式表示。试证明之。

$$\Delta f = \frac{1}{c_1 c_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{c_2}{c_1} \frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{c_1}{c_2} \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)\right)$$

然后再应用于极坐标的情况。

4　在空间里，当线素在正交坐标下可表示为

$ds^2 = (c_1 du_1)^2 + (c_2 du_2)^2 + (c_3 du_3)^2$　（c_1, c_2, c_3 为 u_1，u_2，u_3 的函数）时，函数 $f(u_1, u_2, u_3)$ 的拉氏算子 Δf 可由下式表示。试证明之。

$$\Delta f = \frac{1}{c_1 c_2 c_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{c_2 c_3}{c_1} \frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{c_3 c_1}{c_2} \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{c_1c_2}{c_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\Bigg)$$

然后再应用在圆柱坐标，球坐标的情况上。

5 对于平面曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$（$s$ 为曲线之长），设 $\boldsymbol{e}_1$ 为单位切向量，$\boldsymbol{e}_2$ 为单位法向量，则

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}=\boldsymbol{e}_1,\quad \frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}=k\boldsymbol{e}_2,\quad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}=-k\boldsymbol{e}_1$$

式中的 k 是此曲线在点 $\boldsymbol{x}$ 处的曲率。

试问曲率总是常数的曲线是什么？

6 设平面曲线上的动点的速率为 v，此曲线的曲率为 k，则加速度的切分量为$\frac{dv}{dt}$，法分量为 kv^2。试证明之。

7 设一物体在空间运动时其一点固定，又设固定于物体上的正交标架为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，令

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j\quad (i=1,\ 2,\ 3),$$

则 $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}$。今令 $\alpha_{23}=\gamma_1$，$\alpha_{31}=\gamma_2$，$\alpha_{12}=\gamma_3$，试求关于这样标架，有一定坐标$(a_1,\ a_2,\ a_3)$的点的速度向量关于这样标架的分量。

第三章 曲　　面

§1 曲　　面

在空间里曲面具有的性质中有以下两类：

(1) 撼弯曲面而不改变的性质，

(2) 撼弯曲面发生变化的性质。

在这里所说"撼弯曲面"的意思是，保持曲面上的所有曲线弧长不变的变形。

以后我们要考察的是性质(1)，但是本章开始讨论的曲面基本性质中也包括(2)。

首先考虑怎样解析地表达曲面。

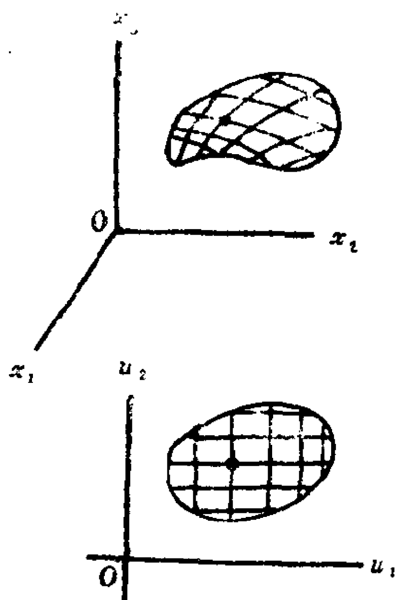
曲面的曲线坐标 设空间里点的直角坐标为 (x_1, x_2, x_3)，再考虑平面 β 上的直角坐标 (u_1, u_2)。在 β 上有 C^3 级函数 $\varphi_1(u_1, u_2)$，$\varphi_2(u_1, u_2)$，$\varphi_3(u_1, u_2)$，假设矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \text{的秩为2} \qquad (1.1)$$

即由此作成的二阶行列式中有不是0者，又设在

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2), \quad x_2 = \varphi_2(u_1, u_2), \quad x_3 = \varphi_3(u_1, u_2) \qquad (1.2)$$

下平面 β 上的点 (u_1, u_2) 与空间的点 (x_1, x_2, x_3) 对应，并且平面 β 上的域 G 与空间



第 3.1 图

的点集S一一对应。称此S为**曲面**（详细说来是**曲面片**），u_1, u_2称为此曲面的**曲线坐标**。

例 1 当点(x_1, x_2)在x_1x_2平面$(x_3=0)$的域G上移动时，由

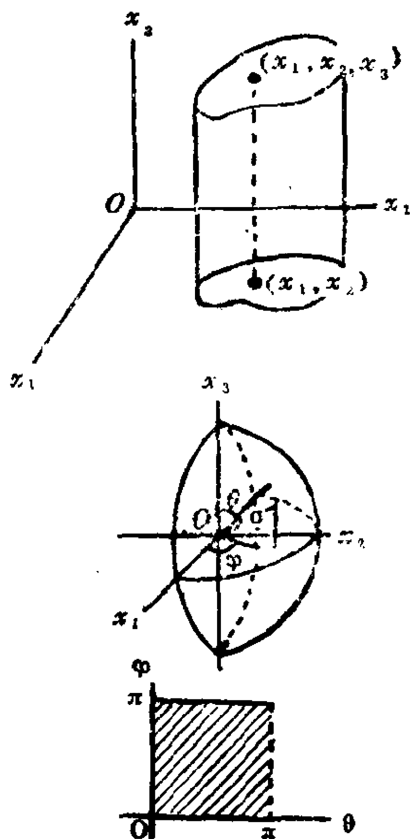
$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

决定的点(x_1, x_2, x_3)的集作成曲面。原因是，令

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = f(u_1, u_2) \qquad (1.3)$$

则(1.1)成立。

例 2 球心在原点，半径a的球面上的点，用球坐标a，θ，φ可写做



第 3.2 图

$$x_1 = a\sin\theta\cos\varphi$$
$$x_2 = a\sin\theta\sin\varphi \qquad (1.4)$$
$$x_3 = a\cos\theta$$

令$u_1=\theta$，$u_2=\varphi$考虑

$$0<\theta<\pi, \quad 0<\varphi<\pi$$

根据(1.4)，半球面在上述含义下是曲面。

使用向量记法，令点(x_1, x_2, x_3)的位置向量为$\boldsymbol{x}$，则用向量积可将(1.1)写做

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\right] \neq 0 \qquad (1.5)$$

于是令

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2} \qquad (1.6)$$

则它们是切平面上的向量，而且

$$d\boldsymbol{x} = du_1\boldsymbol{e}_1 + du_2\boldsymbol{e}_2$$

再令

$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_i}, \ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_j}\right) \qquad (1.7)$$

$$(i, j = 1, 2)$$

则曲面上的线素 ds 变成

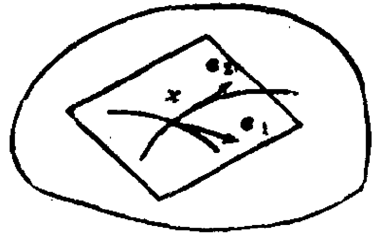
$$ds^2=(d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{x})=\sum_{i,j}g_{ij}du_idu_j \tag{1.8}$$

(1.6) 是沿曲面的自然标架。

其次取 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的线性组合 $\overline{\boldsymbol{e}}_1,\overline{\boldsymbol{e}}_2$，则这些也在切平面上，并且

$$d\boldsymbol{x}=\omega_1\overline{\boldsymbol{e}}_1+\omega_2\overline{\boldsymbol{e}}_2$$

式中 ω_1,ω_2 为 du_1，du_2 的线性无关的一次式。令 $(\overline{\boldsymbol{e}}_i,\overline{\boldsymbol{e}}_j)=\overline{g}_{ij}$，则



第 3.3 图

$$ds^2=(d\boldsymbol{x},d\boldsymbol{x})=\sum_{i,j}\overline{g}_{ij}\omega_i\omega_j$$

特别当 $\overline{\boldsymbol{e}}_1,\overline{\boldsymbol{e}}_2$ 是正交标架时，$\overline{g}_{ij}=\delta_{ij}$。故

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2 \tag{1.9}$$

例 1 球　　面

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)=(a\sin\theta\cos\varphi,a\sin\theta\sin\varphi,a\cos\theta)$$

在自然标架下

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}=(a\cos\theta\cos\varphi,a\cos\theta\sin\varphi,-a\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\varphi}=(-a\sin\theta\sin\varphi,a\sin\theta\cos\varphi,0)$$

因此得

$$g_{11}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)=a^2,g_{12}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=0,g_{22}=(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)=a^2\sin^2\theta$$

故

$$ds^2=a^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{1.10}$$

再令

$$\overline{\boldsymbol{e}}_1=\frac{1}{a}\boldsymbol{e}_1,\quad \overline{\boldsymbol{e}}_2=\frac{1}{a\sin\theta}\boldsymbol{e}_2$$

则 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$ 是正交标架，

$$d\boldsymbol{x}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\varphi}d\varphi=ad\theta\overline{\boldsymbol{e}}_1+a\sin\theta d\varphi\overline{\boldsymbol{e}}_2$$

于是令

$$\omega_1=ad\theta,\quad \omega_2=a\sin\theta d\varphi$$

则
$$dx=\omega_1\bar{e}_1+\omega_2\bar{e}_2,\quad ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2 \qquad (1.11)$$

例 2 曲面 $x_3=f(x_1,x_2)$

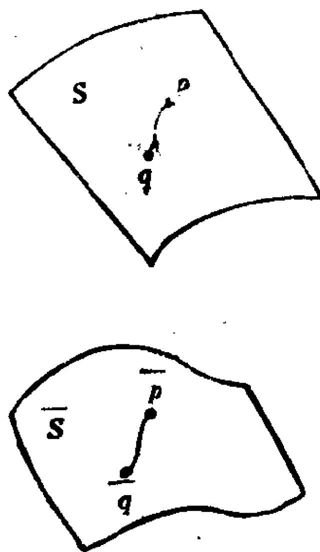
这时
$$x=(x_1,x_2,f)\quad (f=f(x_1,x_2))$$
在曲面上，x_1，x_2 可看做曲线坐标，故

$$e_1=\frac{\partial x}{\partial x_1}=(1,0,f_{x_1})$$
$$\left(f_{x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1},\ f_{x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$
$$e_2=\frac{\partial x}{\partial x_2}=(0,1,f_{x_2})$$

由此得
$$ds^2=(1+f_{x_1}^2)dx_1^2+2f_{x_1}f_{x_2}dx_1dx_2+(1+f_{x_2}^2)dx_2^2$$

§2 等距对应与保角对应

等距对应(isometry) 有二曲面S，$\bar{S}$，在它们之间存在一一点对应，如果相对应的二曲线之长总相等，则称此对应为**等距对应**。将此对应看做从S到$\bar{S}$（或从$\bar{S}$到S）的映射时，也称为**等距映射**。



第 3.4 图

设使用S与$\bar{S}$的曲线坐标 u_1,u_2，$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$ 分别可表示它们的线素 ds，$d\bar{s}$ 为
$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}du_idu_j,$$
$$d\bar{s}^2=\sum_{i,j}\bar{g}_{ij}d\bar{u}_id\bar{u}_j$$
如果S，$\bar{S}$间的点对应由 C^1 级函数
$$\bar{u}_1=\varphi_1(u_1,u_2)$$
$$\bar{u}_2=\varphi_2(u_1,u_2) \qquad (2.1)$$
给定，而且
$$d\bar{s}^2=ds^2 \qquad (2.2)$$
则此对应是S，$\bar{S}$间的等距对应。

等距对应也全都满足(2.2)可证明如下．对于S上的任意曲线 c：

$u_1 = u_1(t)$，$u_2 = u_2(t)$，设根据(2.1)相对应的$\overline{S}$上的曲线为 $\overline{\boldsymbol{u}}_1 = \overline{\boldsymbol{u}}_1(t)$，$\overline{\boldsymbol{u}}_2 = \overline{\boldsymbol{u}}_2(t)$，则

$$\int d\overline{s} = \int ds \quad 即 \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\overline{s}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt$$

因 t_1, t_2 任意，故得

$$\frac{d\overline{s}}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

即
$$\sum_{i,j} \overline{g}_{ij} \frac{d\overline{\boldsymbol{u}}_i}{dt} \frac{d\overline{\boldsymbol{u}}_j}{dt} = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}$$

因此

$$\sum_{i,j,k,h} \overline{g}_{ij} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial u_k} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_j}{\partial u_h} \frac{du_k}{dt} \frac{du_h}{dt} = \sum_{k,h} g_{kh} \frac{du_k}{dt} \frac{du_h}{dt}$$

由于曲线 c 的取法知$\frac{du_1}{dt}$，$\frac{du_2}{dt}$可以任意选取，故得

$$\sum_{i,j} \overline{g}_{ij} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_i}{\partial u_k} \frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}_j}{\partial u_h} = g_{kh}$$

由此可导出(2.2)。

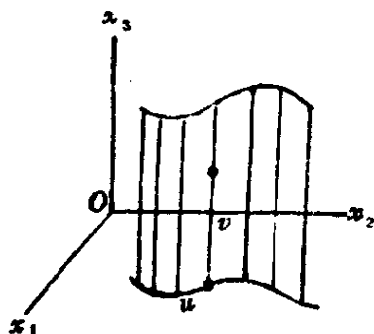
例 1 关于柱面

$$x_1 = f(u),\ x_2 = g(u), x_3 = v \quad (a < u < b)$$

设 u 是柱面与 $x_3 = 0$ 的交线的弧长，则此柱面的线素 ds 是

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = du^2 + dv^2$$

故此柱面与此 (u, v) 为直角坐标的平面的一部分 $a < u < b$ 等距。

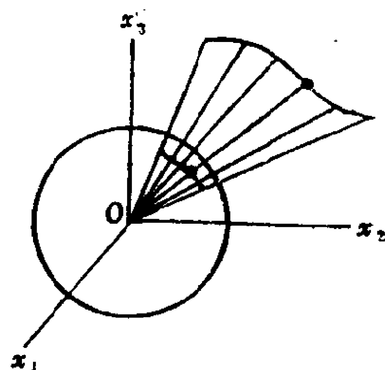


例 2 关于锥面

$$x_1 = uf_1(v),\ x_2 = uf_2(v),\ x_3 = uf_3(v)$$

设曲线

$$x_1 = f_1(v),\ x_2 = f_2(v),\ x_3 = f_3(v)$$



第 3.5 图

在以原点为球心，半径 1 的球面上，取 v 为此曲线的弧长，则

$$f_1(v)^2+f_2(v)^2+f_3(v)^2=1, f'_1(v)^2+f'_2(v)^2+f'_3(v)^2=1$$

故得

$$f_1(v)f'_1(v)+f_2(v)f'_2(v)+f_3(v)f'_3(v)=0$$

此锥面的线素为

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=du^2+u^2dv^2$$

在此锥面上考虑域

$$u>0, \quad a>v>0 \quad (a<2\pi).$$

令$u=r$，$v=\theta$，考虑从锥面上的点(u,v)到欧氏平面上极坐标(r,θ)的点这样映射。因

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

表示这个平面的线素，故此映射为等距映射。

例 1 与例 2 说明柱面与锥面可以无伸缩地展开在平面上，因此是曲面的等距变形．对此，有时也可考虑同一面上的等距映射如下．

例 3 在平面上考虑直角坐标，由

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + a_1 \\ x'_2 &= x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + a_2 \end{aligned} \quad (\theta, a_1, a_2\text{是常数})$$

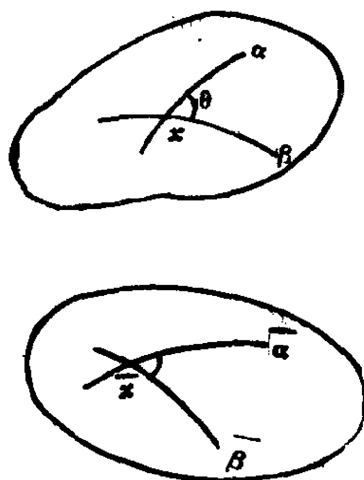
决定将点(x_1,x_2)映到点(x'_1,x'_2)的位移，因

$$dx'^2_1+dx'^2_2=dx_1^2+dx_2^2$$

故为平面自己上的等距映射。

例 4 正圆柱面绕轴旋转以及沿轴方向移动是等距映射。

例 5 绕球心转动是等距映射。



第 3.6 图

保角对应(conformal correspondence) 在二曲面S，$\overline{S}$间有一一对应，设 α，β 为在S上任意点相交的任意曲线，又设 $\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$ 为与之对应的$\overline{S}$上的曲线。如果 α，β 的夹角总和 $\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$ 的夹角相等时，则称此对应为**保角对应**。将此对应看做从S到$\overline{S}$（或从$\overline{S}$到S）的映射时，称为**保角映射**。

设曲面S的曲线坐标为u_1, u_2；又设在S上通过点$\boldsymbol{x}$的曲线α的参数为t，其参数方程为$u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$，则此曲线的切向量为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt}$$

故令
$$\frac{du_1}{dt} = a_1, \qquad \frac{du_2}{dt} = a_2,$$

则关于自然标架，

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$$

同理考虑过点$\boldsymbol{x}$的另一条曲线β，设其切向量为

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2$$

因为$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij}$，故在点$\boldsymbol{x}$二切向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$满足

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\sum g_{ij}a_ib_j}{\sqrt{\sum g_{ij}a_ia_j}\sqrt{\sum g_{ij}b_ib_j}} \tag{2.3}$$

设曲面S，$\overline{S}$间存在一一对应，对应点使用相同的曲线坐标u_1, u_2，又设对应于S上相交二曲线α，β的是$\overline{S}$上二曲线$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$。设对应于α, β的交点$\boldsymbol{x}$是$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$的交点$\overline{\boldsymbol{x}}$，在$\overline{\boldsymbol{x}}$考虑$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$的切向量。因在$S$，$\overline{S}$的对应点使用相同坐标，故关于自然标架，切向量的分量仍然是a_1，a_2以及b_1，b_2。今设$\overline{S}$的线素为

$$d\overline{s}^2 = \sum_{i,j}\overline{g}_{ij}du_idu_j$$

又设$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$的夹角为φ，则

$$\cos\varphi = \frac{\sum \overline{g}_{ij}a_ib_j}{\sqrt{\sum \overline{g}_{ij}a_ia_j}\sqrt{\sum \overline{g}_{ij}b_ib_j}} \tag{2.4}$$

这时，如果$\overline{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$，则由(2.3)，(2.4)得$\theta = \varphi$，即

定理 3.1 设二曲面S，$\overline{S}$上存在一一可微分对应(同胚对应)，对应点用相同参数表示，如果线素ds，$d\overline{s}$间成立

$$d\overline{s}^2 = \lambda^2 ds^2$$

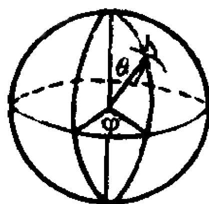
则此对应为保角对应。

反之，也可证明保角对应都满足这个条件。

例 1 由(1.10)可见，球面的线素为

$$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)=a^2\sin^2\theta\left(\left(\frac{d\theta}{\sin\theta}\right)^2+d\varphi^2\right)$$

因为 $\int\frac{d\theta}{\sin\theta}=\log\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$

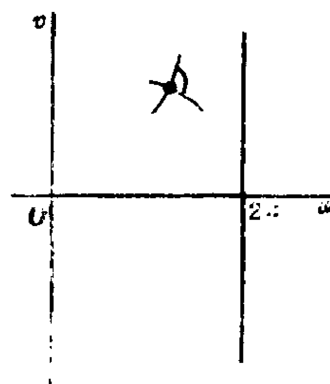


故令 $u=\varphi,\ v=-\log\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$ （1）

则得 $ds^2=a^2\sin^2\theta(du^2+dv^2)$

然若在欧氏平面上，考虑直角坐标 u,v，则线素为

$$d\bar{s}^2=du^2+dv^2$$



第 3.7 图

故(1)给出球面的一部分

$$0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi$$

与欧氏平面的一部分

$$0<u<2\pi,\ -\infty<v<\infty$$

保角对应。

例 2 极射影 (stereographic projection)

球面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3 \qquad (1)$$

上的任意点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 与定点 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 用直线连接之，设与平面 $x_3=0$ 的交点为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,0)$，则

$$\frac{x_1}{X_1}=\frac{x_2}{X_2}=\frac{x_3}{1} \qquad (2)$$

由(1)，(2)得

$$x_1=\frac{X_1}{X_1^2+X_2^2+1},\ x_2=\frac{X_2}{X_1^2+X_2^2+1},\ x_3=\frac{1}{X_1^2+X_2^2+1} \qquad (3)$$

设球面(1)的线素为 ds，则

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

将(3)代入并计算之得

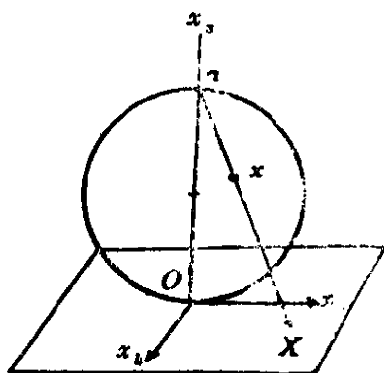
$$ds^2=\frac{(dX_1)^2+(dX_2)^2}{(X_1^2+X_2^2+1)^2}$$

这时，X_1，X_2 可看做球面上的曲线坐标，而平面 $x_3=0$ 上的线素是

$$d\bar{s}^2=dX_1^2+dX_2^2$$

故得 $\quad d\bar{s}^2=(X_1^2+X_2^2+1)^2ds^2$

即球面与欧氏平面的对应 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{X}$ 是保角映射。



第 3.8 图

例 3 解析映射 (analytic mapping)

设 $w=f(z)$ 为复变数 z 的正则函数 (可微分函数)，由此将复平面内的 $z=x_1+ix_2$ (x_1,x_2 为实数) 映到点 $w=y_1+iy_2$(y_1,y_2 为实数)，称此映射为**解析映射**。此映射为保角映射可证明如下。因 $f(z)$正则，故

$$dw=f'(z)dz$$

从而
$$dwd\bar{w}=f'(z)\overline{f'(z)}dzd\bar{z}$$

然因
$$dwd\bar{w}=dy_1^2+dy_2^2,\quad dzd\bar{z}=dx_1^2+dx_2^2$$

故得
$$dy_1^2+dy_2^2=\lambda(dx_1^2+dx_2^2)$$

这说明 $(x_1,x_2)\to(y_1,y_2)$ 是从欧氏平面到欧氏平面的保角映射。

§3 高斯曲率

设在三维欧氏空间里，$\boldsymbol{x}$ 为多元函数。取以 $\boldsymbol{x}$ 为顶点的正交标架 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 如于$p.47$ 所述。令

$$d\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}\omega_i\boldsymbol{e}_i,\quad d\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{3.1}$$

则
$$\omega_{ij}=-\omega_{ji} \tag{3.2}$$

又其结构方程为

$$d\omega_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_j\wedge\omega_{ji},\qquad d\omega_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}$$

即
$$\begin{aligned}d\omega_1&=\omega_2\wedge\omega_{21}+\omega_3\wedge\omega_{31},\\ d\omega_2&=\omega_1\wedge\omega_{12}+\omega_3\wedge\omega_{32},\\ d\omega_3&=\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32},\quad d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13},\quad d\omega_{31}=\omega_{32}\wedge\omega_{21}\tag{3.4}$$

以下使用这些式子来研究曲面的性质。

在曲面 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u_1,u_2)$ 的各点的切平面上，取正交标架 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$。如果关于变数 u_1，u_2，$\boldsymbol{x}$ 是 C^3 级的，则可取 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是 C^2 级的。故令

$$\boldsymbol{e}_3=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$$

则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 成右手系的正交标架。由(1.12)知

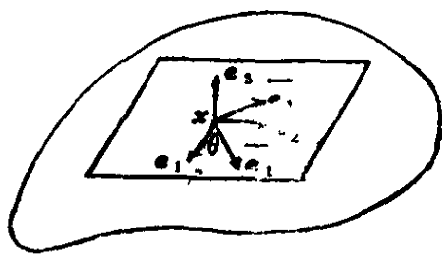
$$d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2\tag{3.5}$$

这是一般式(3.1)满足

$$\omega_3=0\tag{3.6}$$

的情况。再根据(3.1)，(3.2)得

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{e}_1&=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\omega_{13}\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_2&=-\omega_{12}\boldsymbol{e}_1+\omega_{23}\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_3&=-\omega_{13}\boldsymbol{e}_1-\omega_{23}\boldsymbol{e}_2\end{aligned}\tag{3.7}$$



第 3.9 图

今绕 $\boldsymbol{e}_3$ 轴将$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$旋转 θ 角得 $\overline{\boldsymbol{e}}_1,\overline{\boldsymbol{e}}_2$，则

$$\overline{\boldsymbol{e}}_1=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2,\quad \overline{\boldsymbol{e}}_2=-\sin\theta\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\boldsymbol{e}_2\tag{3.8}$$

反之，
$$\boldsymbol{e}_1=\cos\theta\overline{\boldsymbol{e}}_1-\sin\theta\overline{\boldsymbol{e}}_2,\quad \boldsymbol{e}_2=\sin\theta\overline{\boldsymbol{e}}_1+\cos\theta\overline{\boldsymbol{e}}_2\tag{3.9}$$

于是取 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为标架，令

$$\begin{aligned}&d\boldsymbol{x}=\overline{\omega}_1\overline{\boldsymbol{e}}_1+\overline{\omega}_2\overline{\boldsymbol{e}}_2\\ &d\overline{\boldsymbol{e}}_1=\overline{\omega}_{12}\overline{\boldsymbol{e}}_2+\overline{\omega}_{13}\boldsymbol{e}_3,\quad d\overline{\boldsymbol{e}}_2=-\overline{\omega}_{12}\overline{\boldsymbol{e}}_1+\overline{\omega}_{23}\boldsymbol{e}_3\\ &d\boldsymbol{e}_3=-\overline{\omega}_{13}\overline{\boldsymbol{e}}_1-\overline{\omega}_{23}\overline{\boldsymbol{e}}_2\end{aligned}$$

将(3.8)代入之，并用(3.5)，(3.7)，则得下式。

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\omega}_1=\omega_1\cos\theta+\omega_2\sin\theta,\quad \overline{\omega}_2=-\omega_1\sin\theta+\omega_2\cos\theta\\ &\overline{\omega}_{13}=\omega_{13}\cos\theta+\omega_{23}\sin\theta,\quad \overline{\omega}_{23}=-\omega_{13}\sin\theta+\omega_{23}\cos\theta\\ &\overline{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

总结上述讨论得

定理 3.2 设在曲面的切平面上，将正交标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 旋转 θ 角得 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，则在相对分量间(3.10)成立。

由(3.10)可见

$$\overline{\omega}_1\wedge\overline{\omega}_2=\omega_1\wedge\omega_2,\quad \overline{\omega}_{13}\wedge\overline{\omega}_{23}=\omega_{13}\wedge\omega_{23} \tag{3.11}$$

因此这些量是与切平面上的正交标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的选法无关的二次外微分形式。其含义如下。

设曲面上的面素为 dS，则

$$dS=\omega_1\wedge\omega_2 \tag{3.12}$$

再者，设从原点引出单位向量 $\boldsymbol{e}_3$ 的端点所描球面(曲面的球面表示)的面素为 $d\sigma$，则

$$d\sigma=\omega_{13}\wedge\omega_{23} \tag{3.13}$$

证明 在曲面上的点 $\boldsymbol{x}$，$\omega_1=(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1)$，$\omega_2=(d\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2)$。现在取 $\boldsymbol{x}$ 为原点，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为基本向量，则

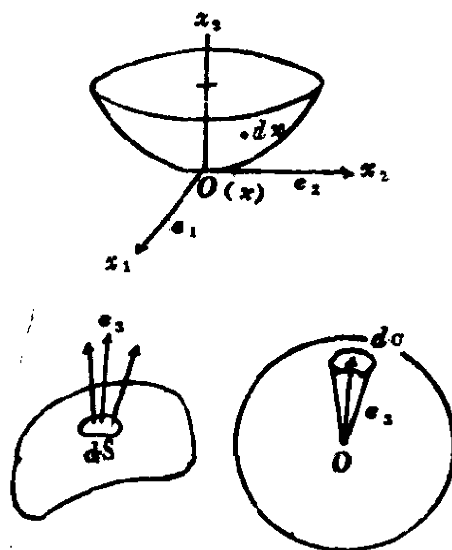
$$d\boldsymbol{x}=(dx_1,dx_2,dx_3),$$

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$$

故在此点

$$\omega_1=dx_1,\quad \omega_2=dx_2$$

因此，$\omega_1\wedge\omega_2=dx_1\wedge dx_2$ (1)



第 3.10 图

再设关于上述坐标轴，曲面的方程为

$$x_3=f(x_1,x_2),$$

则 $$f_{x_1}(0,0)=0,\quad f_{x_2}(0,0)=0$$

故在此点的面素为

$$dS=\sqrt{1+f_{x_1}(0,0)^2+f_{x_2}(0,0)^2}\,dx_1\wedge dx_2=dx_1\wedge dx_2 \tag{2}$$

由(1),(2)得

$$dS=\omega_1\wedge\omega_2$$

从原点引 $\boldsymbol{e}_3$，在其端点所描的球面上，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 可看做切平面上的正交标架，而且

$$d\boldsymbol{e}_3=\omega_{31}\boldsymbol{e}_1+\omega_{32}\boldsymbol{e}_2$$

因此与(3.12)一样得

$$d\sigma=\omega_{31}\wedge\omega_{32}$$

是它的面素（证毕）。

高斯曲率（Gaussian Curvature） 由结构方程(3.3)，(3.6)得

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12} \tag{3.14}$$

又由 $d\omega_3=0$ 知

$$\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}=0 \tag{3.15}$$

因为 ω_1，ω_2 做为 du_1,du_2 的一次式是线性无关的，故可令

$$\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,\quad \omega_{23}=b'\omega_1+c\omega_2$$

代入(3.15)得

$$(b-b')\omega_1\wedge\omega_2=0$$

故 $\qquad b=b'$

因此
$$\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,\quad \omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2 \tag{3.16}$$

$$\omega_{13}\wedge\omega_{23}=(ac-b^2)\omega_1\wedge\omega_2 \tag{3.17}$$

其次，对于切平面上的正交标架的旋转 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\to\bar{\boldsymbol{e}}_1,\bar{\boldsymbol{e}}_2$；$\omega_1,\omega_2$，$\omega_{31}$，$\omega_{32}$ 的变换规律是(3.10)，可见

$$\bar{\omega}_1\bar{\omega}_{13}+\bar{\omega}_2\bar{\omega}_{23}=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}$$

于是令
$$P=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23} \tag{3.18}$$

即使 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 绕 $\boldsymbol{e}_3$ 轴旋转，P 也不变。即为只和曲面的点 $\boldsymbol{x}$ 有关的量。

将(3.16)代入(3.18)得

$$P=a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2 \tag{3.19}$$

将此式看做 ω_1,ω_2 的二次形，则在 ω_1,ω_2 的适当正交变换(3.10) 下变为

$$P=k_1\bar{\omega}_1^2+k_2\bar{\omega}_2^2 \tag{3.20}$$

于是
$$a+c=k_1+k_2,\quad ac-b^2=k_1k_2 \tag{3.21}$$

k_1，k_2 是只与曲面上各点 $\boldsymbol{x}$ 有关的数，称为**主曲率**(principal

curvature)。而且

$$K = k_1 k_2 \tag{3.22}$$

称为**高斯曲率**。由(3.12),(3.13),(3.17),(3.21),(3.22)知

$$d\sigma = KdS \tag{3.23}$$

即

$$K = \frac{d\sigma}{dS} = \frac{\text{球面表示的面素}}{\text{曲面的面素}} \tag{3.24}$$

再参照(3.4)知

$$-d\omega_{12} = K\omega_1 \wedge \omega_2 \tag{3.25}$$

当曲面作等距变形时，虽然 ds^2 不变，究竟曲面变了形，随之有一些数发生变化。但可证明下列

定理 3.3 高斯曲率K在曲面的等距变形下不变。

证明 此定理的含义是K只与线素 ds 有关。首先，在曲面上取与曲面相切的正交标架 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，取单位法向量为 $\boldsymbol{e}_3$，则

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

故由(3.14)得

$$d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21} = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$$

如果已知 ω_1，ω_2，则由此二式可决定 ω_{12} 如下。因为 ω_1，ω_2 是线性无关的一次微分形式，故可令 $\omega_{12} = p\omega_1 + q\omega_2$，故

$$d\omega_1 = p\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = q\omega_1 \wedge \omega_2$$

因为 ω_1，ω_2 已知，故由此二式可决定 p，q，因此，ω_{12} 也可决定下来。于是由

$$-d\omega_{12} = K\omega_1 \wedge \omega_2$$

可求K。如前所述，K决定于曲面上点的位置与标架的选法无关，故知K只由 ds^2 的形状决定（证毕）。

注 按此证明所述方法，可从 $ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$ 求出K。

以下计算各种曲面的高斯曲率。

平面，柱面，锥面的高斯曲率 如果使用适当的曲线坐标 u,v，这些曲面的线素可表示为

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

(参照 $p.55$)．故令

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv$$

则
$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0$$

令 $\omega_{12} = p\omega_1 + q\omega_2$，则得 $p=0, q=0, \omega_{12}=0$，故由(3.25)得

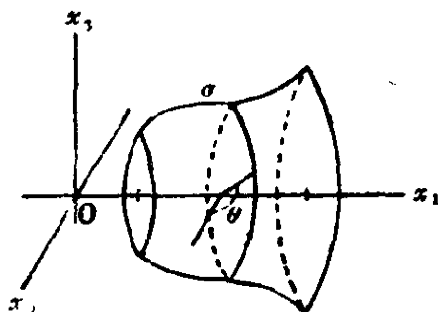
$$K = 0$$

即平面，柱面，锥面的高斯曲率是0．

回转面的高斯曲率 取直角坐标(x_1, x_2, x_3)．设 x_1x_3 平面内的曲线的方程为

$$x_1 = g(\sigma), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = f(\sigma)$$

式中 σ 为曲线的长．将此曲线绕 x_1 轴旋转而成曲面可用 σ 以及绕 x_1 轴的回转角 θ 表示为



第 3.11 图

$$x_1 = g(\sigma), \quad x_2 = f(\sigma)\cos\theta, \quad x_3 = f(\sigma)\sin\theta$$

这时，线素是

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$
$$= dg^2 + (df\cos\theta - f\sin\theta d\theta)^2 + (df\sin\theta - f\cos\theta d\theta)^2$$

因 σ 为弧长，故 $d\sigma^2 = df^2 + dg^2$，即

$$f'(\sigma)^2 + g'(\sigma)^2 = 1 \tag{3.26}$$

故
$$ds^2 = d\sigma^2 + f^2 d\theta^2 \tag{3.27}$$

于是令
$$\omega_1 = d\sigma, \quad \omega_2 = f d\theta$$

则
$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = df \wedge d\theta = f' d\sigma \wedge d\theta$$

再令 $\omega_{12} = p d\sigma + q d\theta$，则由 $d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$ 得

$$0 = -\omega_2 \wedge \omega_{12} = -f d\theta \wedge (p d\sigma + q d\theta) = -f p d\theta \wedge d\sigma$$
$$f' d\sigma \wedge d\theta = \omega_1 \wedge \omega_{12} = d\sigma \wedge (p d\sigma + q d\theta) = q d\sigma \wedge d\theta$$

故
$$p = 0, \quad q = f'$$

因此
$$\omega_{12} = f' d\theta$$

由此可见
$$d\omega_{12} = df' \wedge d\theta = f'' d\sigma \wedge d\theta$$

由(3.25)得

$$-f''d\sigma\wedge d\theta=Kd\sigma\wedge fd\theta$$

从而
$$K=-\frac{f''}{f} \tag{3.28}$$

注 总之，当线素为(3.27)时，高斯曲率就具有这样形状。

以下举这样例子。

(1) 圆的回转面

x_1x_3 平面上的圆

$$x_1^2+(x_3-b)^2=a^2$$

可写成

$x_1=a\cos\varphi,$

$x_3=a\sin\varphi+b$

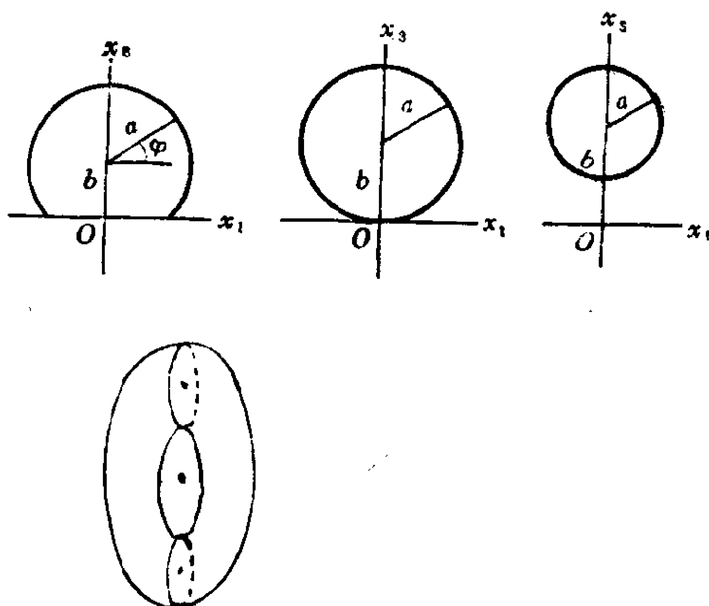
$d\sigma=ad\varphi$

将此圆绕 x_1 轴回转之而得曲面的线素是

$$ds^2=d\sigma^2+(a\sin\varphi+b)^2d\theta^2$$

故 $f=a\sin\varphi+b$，由(3.28)得

$$K=\frac{\sin\varphi}{a(a\sin\varphi+b)}$$



第 3.12 图

特别当 $b=0$ 时，此曲面为球面，

$$K=\frac{1}{a^2}$$

又当 $b>a$ 时，此曲面为圆环面 (torus)。

(2) 高斯曲率一定的回转面

这是在(3.28)里K是一定的情况。这时要求的是 $f(\sigma),g(\sigma)$以决定曲面的形状。将K分为 0，正，负的情况讨论之。

(Ⅰ) 当 $K=0$ 时

从(3.28)可见

$$f = a\sigma + b \quad (a, b \text{ 常数})$$

去掉附加常数 b 考虑，σ 并无本质上的变化，故令 $b=0$ 进行处理。于是

$$ds^2 = d\sigma^2 + a^2\sigma^2 d\theta^2$$

由(3.26)知

$$a^2 + g'^2 = 1$$

由此可得
$$g = \pm\sqrt{1-a^2}\,\sigma + c$$

因此，x_1x_3 平面上的线 $x_1 = f(\sigma)$，$x_3 = g(\sigma)$ 是直线，原来的曲面是平面，正圆柱面，正圆锥面之一。

（Ⅱ） 当 $K>0$ 时令 $K=c^2$，由(3.28)得

$$f = k\sin(c\sigma + b)$$

因取附加常数 b 为 0 也行，故

$$f = k\sin c\sigma$$

从(3.26)得

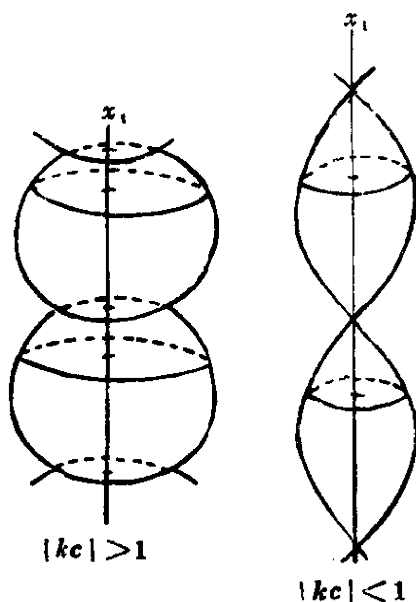
$$(kc)^2\cos^2 c\sigma + g'^2 = 1,$$

$$g = \int\sqrt{1-(kc\cos c\sigma)^2}\,d\sigma$$

这是椭圆积分，除了 $kc = \pm1$ 的情况外，不能用初等函数表达。这时的图形如右图所示。只有当 $k=\pm1$ 时得

$$g = k\sin c\sigma + a \quad (a \text{ 为常数}),$$

$x_1 = f(\sigma), x_3 = g(\sigma)$ 是圆，曲面为球面。



第 3.13 图

（Ⅲ） 当 $K<0$ 时

令 $K=-c^2$，从(3.28)得

$$f = Ae^{c\sigma} + Be^{-c\sigma}$$

运用由
$$\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

定义的双曲函数 $\cosh t, \sinh t$，则

(1) 当 A，B 同符号时，$f = k\cosh(c\sigma + a)$

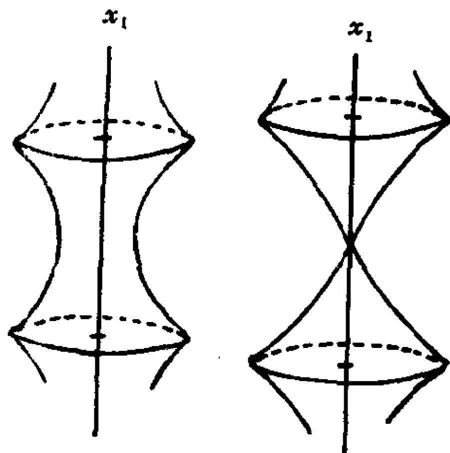
(2) 当 A，B 异符号时，$f = k\sinh(c\sigma + a)$

(3) 当 $B = 0$ 时，$f = Ae^{c\sigma}$

(4) 当 $A = 0$ 时，$f = Be^{-c\sigma}$

将 σ 移动常数，则当(1)时

$$f = k\cosh c\sigma$$



第 3.14 图

由(3.26)得

$$g = \int \sqrt{1 - (kc\sinh c\sigma)^2}\, d\sigma$$

即在 x_1x_3 平面上的曲线为

$$x_1 = k\cosh c\sigma, \quad x_3 = \int \sqrt{1 - (kc\sinh c\sigma)^2}\, d\sigma$$

同理，当(2)时

$$x_1 = k\sinh c\sigma, \quad x_3 = \int \sqrt{1 - (kc\cosh c\sigma)^2}\, d\sigma$$

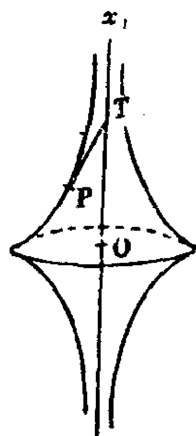
根据情况把 c 看做正或负，则(3)，(4)可变为(3)的情况。因此只考虑(3)即可，当 $f = Ae^{c\sigma}$ 时，

$$g = \int \sqrt{1 - f'^2}\, d\sigma = \int \sqrt{1 - c^2A^2e^{2c\sigma}}\, d\sigma$$

令 $f = Ae^{c\sigma}$ 为 $\frac{1}{c}\sin t$，适当地移动轴

则 $$x_1 = \frac{1}{c}\sin t,$$

$$x_3 = \frac{1}{c}\left(\log\left|\tan\frac{t}{2}\right| + \cos t\right)$$



第 3.15 图

此方程表示的曲线如右图所示，于此曲线上任意点 P 引切线，设与 x_1

轴的交点为T，可证总是 $PT=\frac{1}{|c|}$.称此曲线为**曳物线**(tractrix).

§4 曲面的展开

一般地说，将曲面展开在平面上是不可能的，但是要想沿曲面上的曲线将切平面展开在平面上是可以作得到的，象下边这样作即可。设曲面S上的曲线为 c，将此S在平面 α 上滚动使得切点总是 c 的点，则切平面依次重迭在α上，曲线c以α上的曲线出现。以下将此事实公式化。

在曲线 c 的点 $\boldsymbol{x}$，取 $\boldsymbol{e}_3$ 为法向量的正交标架 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则

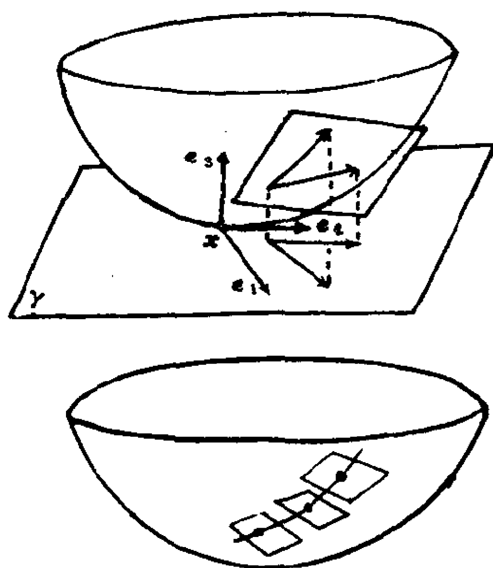
$$d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2$$

故点 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ 可看做在 $\boldsymbol{x}$ 处的切平面上，而且

$$d\boldsymbol{e}_1=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2+\omega_{13}\boldsymbol{e}_3$$

$$d\boldsymbol{e}_2=-\omega_{12}\boldsymbol{e}_1+\omega_{23}\boldsymbol{e}_3$$

现在考虑 $d\boldsymbol{e}_1$，$d\boldsymbol{e}_2$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的切平面γ上的正射影，分别为 $\omega_{12}\boldsymbol{e}_2$，$-\omega_{12}\boldsymbol{e}_1$，而在点 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ 处的切平面上的向量 $\boldsymbol{e}_1+d\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2+d\boldsymbol{e}_2$ 向平面 γ 上正射影作成以点 $\boldsymbol{x}+\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2$ 为顶点，$\boldsymbol{e}_1+\omega_{12}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_2-\omega_{12}\boldsymbol{e}_1$ 为轴的标架。这可以这样看：把 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ 处的切平面落在γ上。这时，此标架的变化在γ 上是



第 3.16 图

$$d\boldsymbol{x}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2,\quad d\boldsymbol{e}_1=\omega_{12}\boldsymbol{e}_2,\quad d\boldsymbol{e}_2=-\omega_{12}\boldsymbol{e}_1$$

由此想法出发，定义曲线c在平面上的展开如下。

用参数 t 表示曲线 c。因 $\omega_1,\omega_2,\omega_{12}$ 是 $u_1(t)$，$u_2(t)$的一次微分形式，故得

$$\omega_1=\alpha_1dt,\quad \omega_2=\alpha_2dt,\quad \omega_{12}=\alpha_{12}dt$$

($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{12}$ 为 t 的函数）．于是设 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2$ 为未知的二维向量，求微分方程

$$d\boldsymbol{p}=(\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2)dt,\ d\boldsymbol{I}_1=\alpha_{12}\boldsymbol{I}_2dt,\ d\boldsymbol{I}_2=-\alpha_{12}\boldsymbol{I}_1dt$$

在初始条件

$$\text{当 } t=t_0 \text{ 时，} \boldsymbol{p}=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{c}_2$$

下的解．其中设

$$(\boldsymbol{c}_i,\boldsymbol{c}_j)=\delta_{ij}$$

这时可证，解向量 $\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{I}_1(t)$，$\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{I}_2(t)$ 满足

$$(\boldsymbol{I}_i,\boldsymbol{I}_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2)$$

即下列引理成立．

引理 当 $\alpha_{ij}=-\alpha_{ji}\,(i,j=1,2)$ 是 t 的 C^1 级函数时，考虑向量 $\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$ 的微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{I}_i}{dt}=\sum_j\alpha_{ij}\boldsymbol{I}_j\quad(i,j=1,2)\tag{4.1}$$

当 $t=t_0$ 时满足

$$(\boldsymbol{I}_i,\boldsymbol{I}_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2)\tag{4.2}$$

的解，则此关系式对于任意的 t 成立．

证明 令

$$m_{ij}=(\boldsymbol{I}_i,\boldsymbol{I}_j)-\delta_{ij}\tag{1}$$

则由(4.1)得

$$\frac{dm_{ij}}{dt}=\left(\frac{d\boldsymbol{I}_i}{dt},\ \boldsymbol{I}_j\right)+\left(\boldsymbol{I}_i\ ,\frac{d\boldsymbol{I}_j}{dt}\right)$$

$$=(\sum_k\alpha_{ik}\boldsymbol{I}_k,\boldsymbol{I}_j)+(\boldsymbol{I}_i,\ \sum_k\alpha_{jk}\boldsymbol{I}_k)$$

$$=\sum_k\alpha_{ik}(\boldsymbol{I}_k,\ \boldsymbol{I}_j)+\sum_k\alpha_{jk}(\boldsymbol{I}_i,\boldsymbol{I}_k)$$

故由(1)可见

$$\frac{dm_{ij}}{dt}=\sum_k\alpha_{ik}(m_{kj}+\delta_{kj})+\sum_k\alpha_{jk}(m_{ik}+\delta_{ik})$$

$$= \sum_k \alpha_{ik} m_{kj} + \alpha_{ij} + \sum_k \alpha_{jk} m_{ik} + \alpha_{ji}$$

因为 $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$，故

$$\frac{dm_{ij}}{dt} = \sum_k \alpha_{ik} m_{kj} + \sum_k \alpha_{jk} m_{ik}$$

然因当 $t = t_0$ 时，$m_{ij} = 0$，故对于任意的 t，此微分方程的解 $m_{ij} = 0$。即 $(\boldsymbol{I}_i, \boldsymbol{I}_j) = \delta_{ij}$（证毕）。

注　在三维以上的情况，此引理包括其证明照样成立。

定理 3.4　设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ 为 t 的 C^1 级函数，考虑以 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2$ 为未知向量的微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \alpha_1 \boldsymbol{I}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{I}_2,\quad \frac{d\boldsymbol{I}_1}{dt} = \alpha_{12} \boldsymbol{I}_2,\quad \frac{d\boldsymbol{I}_2}{dt} = -\alpha_{12} \boldsymbol{I}_1 \tag{4.3}$$

在初始条件

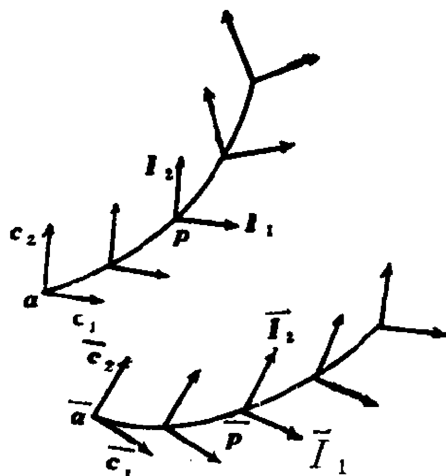
当 $t = t_0$ 时，　　$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{c}_1,\quad \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{c}_2$　　(4.4)

但　　$(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j) = \delta_{ij}\quad (i, j = 1, 2)$

下求到的解而得以 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$ 为顶点的标架 $\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_1(t)$，$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_2(t)$。这时，

（i）　标架 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2$ 是正交标架。

（ii）　以 (4.4) 为初始条件的解而成正交标架之集 $\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{I}_1(t), \boldsymbol{I}_2(t)$ 与以其它正交标架 $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{c}}_1, \overline{\boldsymbol{c}}_2$ 为初始条件的正交标架之集 $\overline{\boldsymbol{p}}(t), \overline{\boldsymbol{I}}_1(t), \overline{\boldsymbol{I}}_2(t)$ 合同。



第 3.17 图

证明　（i）　由引理显然。

（ii）　可证明如下。考虑以 (4.4) 为初始条件的解，设位移此解使正交标架 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_1$ 与正交标架 $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{c}}_1, \overline{\boldsymbol{c}}_2$ 迭合而得的正交标架之集为 $\overline{\boldsymbol{p}}$，$\overline{\boldsymbol{I}}_1$，$\overline{\boldsymbol{I}}_2$，因为它们与 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2$ 合同，故

$$\left(\frac{d\overline{\boldsymbol{p}}}{dt}, \overline{\boldsymbol{I}}_i\right) = \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \boldsymbol{I}_i\right) = \alpha_i,\ \left(\frac{d\overline{\boldsymbol{I}}_i}{dt}, \overline{\boldsymbol{I}}_j\right) = \left(\frac{d\boldsymbol{I}_i}{dt}, \boldsymbol{I}_j\right) = \alpha_{ij}$$

从而 $\frac{d\bar{\boldsymbol{p}}}{dt}=\alpha_1\bar{\boldsymbol{I}}_1+\alpha_2\bar{\boldsymbol{I}}_2$， $\frac{d\bar{\boldsymbol{I}}_1}{dt}=\alpha_{12}\bar{\boldsymbol{I}}_2$， $\frac{d\bar{\boldsymbol{I}}_2}{dt}=-\alpha_{12}\bar{\boldsymbol{I}}_1$

因此，$\bar{\boldsymbol{p}},\bar{\boldsymbol{I}}_1,\bar{\boldsymbol{I}}_2$ 是(4,3)以 $\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{c}}_1,\bar{\boldsymbol{c}}_2$ 为初始条件的解（证毕）。

由定理 3.4 可见，沿曲面上的曲线 $c:u_i=u_i(t)(i=1,2)$ 的解 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t),\boldsymbol{I}_1=\boldsymbol{I}_1(t),\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{I}_2(t)$ 可看做，将切平面上的标架依次落在同一平面上，这是曲面沿曲线c在平面上的**展开**（development）。再由定理 3.4 (ii) 知，即使更换初始条件，这种展开图形全是合同的。

现在在切平面上将正交标架 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 旋转 θ 角得标架 $\bar{\boldsymbol{e}}_1,\bar{\boldsymbol{e}}_2$，则由(3.10)知

$$d\boldsymbol{x}=\bar{\omega}_1\bar{\boldsymbol{e}}_1+\bar{\omega}_2\bar{\boldsymbol{e}}_2,\ d\bar{\boldsymbol{e}}_1=\bar{\omega}_{12}\bar{\boldsymbol{e}}_2+\bar{\omega}_{13}\boldsymbol{e}_3,\ d\bar{\boldsymbol{e}}_2=-\bar{\omega}_{12}\bar{\boldsymbol{e}}_1+\bar{\omega}_{23}\boldsymbol{e}_3$$

其中，

$$\bar{\omega}_1=\omega_1\cos\theta+\omega_2\sin\theta,\quad \bar{\omega}_2=-\omega_1\sin\theta+\omega_2\cos\theta$$
$$\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\theta$$

考虑这种新标架 $\boldsymbol{x}$，$\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$ 沿曲线 c 展开在平面上而得的标架之集 $\bar{\boldsymbol{p}}$，$\bar{\boldsymbol{I}}_1$，$\bar{\boldsymbol{I}}_2$。这是

$$\begin{aligned}&d\bar{\boldsymbol{p}}=(\bar{\alpha}_1\bar{\boldsymbol{I}}_1+\bar{\alpha}_2\bar{\boldsymbol{I}}_2)dt,\ d\bar{\boldsymbol{I}}_1=\bar{\alpha}_{12}\bar{\boldsymbol{I}}_2dt,\\&d\bar{\boldsymbol{I}}_2=-\bar{\alpha}_{12}\bar{\boldsymbol{I}}_1dt\end{aligned}\tag{4.5}$$

的解。式中

$$\bar{\alpha}_1=\alpha_1\cos\theta+\alpha_2\sin\theta,\quad \bar{\alpha}_2=-\alpha_1\sin\theta+\alpha_2\cos\theta,$$

$$\bar{\alpha}_{12}=\alpha_{12}+\frac{d\theta}{dt}$$

然而，用(4.3)的解 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2$，作出

$$\bar{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p},\ \bar{\boldsymbol{I}}_1=\boldsymbol{I}_1\cos\theta+\boldsymbol{I}_2\sin\theta,\ \bar{\boldsymbol{I}}_2=-\boldsymbol{I}_1\sin\theta+\boldsymbol{I}_2\cos\theta,$$

易见，这些满足(4.5)。即

在切平面上将标架旋转 θ 角，则在展开里，标架也旋转 θ 角。

在曲面的切平面上选取标架 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$，由此决定相对分量 $\omega_1,\omega_2,\omega_{12}$。将此曲面沿其上曲线展开在平面上，则此展开决定于此 ω_1,ω_2，

ω_{12}. 然如 $p.63$ 所述，当给定 ω_1, ω_2 时，则 ω_{12} 由

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$$

而定．再根据前页所述，即使将标架从 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 变为 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$，$\bar{\boldsymbol{e}}_2$，但展开本质上一样．由此可见，

曲面的展开只由线素 ds 与曲线而定．

以下举展开之例．

例 球面的展开

使用球坐标 (a, θ, φ)，则半径为 a 的球面上的线素 ds 可写做（参照 $p.53$）

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

对于球面上的点 $\boldsymbol{x}$，令

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{a}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi}$$

在这种情况下令

$$\omega_1 = a d\theta, \quad \omega_2 = a\sin\theta d\varphi$$

于是设 $\omega_{12} = p d\theta + q d\varphi$，则

从 $d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}$ 得 $0 = a\sin\theta \cdot p d\theta \wedge d\varphi$，$p = 0$

从 $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$ 得 $a\cos\theta d\theta \wedge d\varphi = a q d\theta \wedge d\varphi$，$q = \cos\theta$

即

$$\omega_{12} = \cos\theta d\varphi$$

现在沿此球面上的小圆

$$\theta = \alpha \text{（一定）},$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = a\sin\alpha d\varphi, \quad \omega_{12} = \cos\alpha d\varphi$$

令 $\cos\alpha = c$，$\sin\alpha = s$，则展开式变为

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{d\varphi} = a s \boldsymbol{I}_2$$

$$\frac{d\boldsymbol{I}_1}{d\varphi} = c\boldsymbol{I}_2, \quad \frac{d\boldsymbol{I}_2}{d\varphi} = -c\boldsymbol{I}_1$$

在初始条件 $\varphi = 0$ 时，$\boldsymbol{p} = 0$，$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_1^{(0)}$，$\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{I}_2^{(0)}$ 下解之得

$$\boldsymbol{I}_1 = \cos c\varphi \cdot \boldsymbol{I}_1^{(0)} + \sin c\varphi \cdot \boldsymbol{I}_2^{(0)}$$

$$I_2 = -\sin c\varphi \cdot I_1^{(0)} + \cos c\varphi \cdot I_2^{(0)}$$

$$p = \frac{as}{c}(-(1-\cos c\varphi) I_1^{(0)} + \sin c\varphi \cdot I_2^{(0)})$$

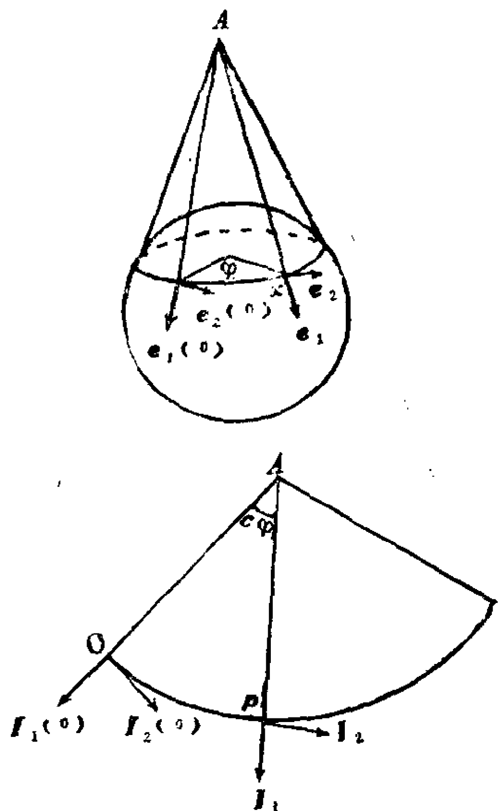
这表示沿小圆 $\theta = \alpha$ 的展开，点 p 描出半径 $\frac{as}{c}$ $(= a\tan\alpha)$ 的圆。这个圆也可按下法得到。沿此小圆考虑与球面相切的正圆锥面，将此正圆锥面展开在平面上，由此小圆而得曲线便是。

又 $$\theta = \frac{\pi}{2}$$

是大圆，这时 $c = 0$，$s = 1$，故得

$$I_1 = I_1^{(0)}, I_2 = I_2^{(0)}, p = a\varphi I_2^{(0)}$$

即大圆的展开是直线。



第 3.18 图

§5 向量的共变微分与测地线

假设在曲面上每个点 x 各有一切向量 v，在此点的切平面上取正交标架 e_1，e_2，设关于此标架，v 的分量为 v_1，v_2，则

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 \tag{5.1}$$

其中设 v_1，v_2 关于曲线坐标 u_1，u_2 是 C^1 级。今取 v 的微分得

$$dv = dv_1 e_1 + v_1 de_1 + dv_2 e_2 + v_2 de_2$$

将(3.8)代入之得

$$dv = (dv_1 - \omega_{12} v_2) e_1 + (dv_2 + \omega_{12} v_1) e_2 + (v_1 \omega_{13} + v_2 \omega_{23}) e_3$$

将此向量正射影在 x 处的切平面上得

$$Dv = (dv_1 - \omega_{12} v_2) e_1 + (dv_2 + \omega_{12} v_1) e_2$$

于是令

$$Dv_1 = dv_1 - \omega_{12} v_2, \quad Dv_2 = dv_2 + \omega_{12} v_1 \tag{5.2}$$

称此二量为向量 $v=(v_1,v_2)$ 沿此曲面的**绝对微分**(absolute differential) 或**共变微分**(covariant differential)。

测地线(geodesic) 沿曲面 S 上的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 将此曲线展开在平面上，考虑由此而得曲线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$。沿此曲线设

$$\omega_1=\alpha_1 dt,\quad \omega_2=\alpha_2 dt,\quad \omega_{12}=\alpha_{12}dt$$

则在平面上

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2,\quad \frac{d\boldsymbol{I}_1}{dt}=\alpha_{12}\boldsymbol{I}_2,\quad \frac{d\boldsymbol{I}_2}{dt}=-\alpha_{12}\boldsymbol{I}_1 \qquad (5.3)$$

此线 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$ 为直线的条件是切向量

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2$$

满足 $$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=0 \quad 即 \quad \frac{d}{dt}(\alpha_1\boldsymbol{I}_1+\alpha_2\boldsymbol{I}_2)=0$$

运用(5.3)计算之得

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}-\alpha_{12}\alpha_2\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{d\alpha_2}{dt}+\alpha_{12}\alpha_1\right)\boldsymbol{e}_2=0$$

参照(5.2)可见，沿曲线得

$$D\alpha_1=0,\quad D\alpha_2=0.$$

即得下列

定理 3.5 将曲面上的曲线展开在平面上，则沿此曲线，切向量的共变微分为 0 等价于此曲线的展开为直线。

一般地说，曲面上的曲线展开在平面上成直线时，称此曲线为**测地线**. 由 p.73 的例可见，在球面上大圆为测地线。

在柱面与锥面上，连结两点的曲线之中，长度最短者展开在平面上变为直线. 此外，球面上的大圆有下列性质。

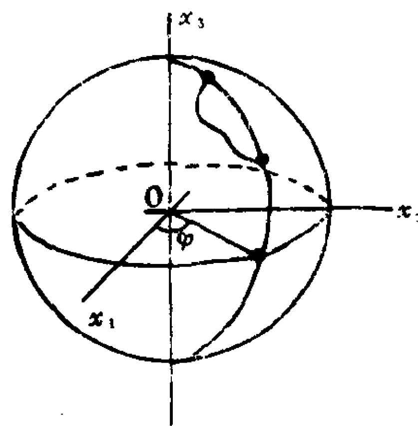
(1) 沿大圆展开之变为直线（即测地线）。

(2) 将球面上二点 A，B，在球面上连结之而得曲线中最短者为大圆的劣弧。

(1)已于上面讨论过，至于(2)，因线素为

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

通过以下讨论可见。



第 3.19 图

今选坐标轴使大圆为 $\varphi = 0$，其上两点以 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2 (0 < \theta_1 < \theta_2)$ 表示，设连结此二点的另一曲线为 $\varphi = f(\theta)$，其长 L 为

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} a\sqrt{1 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$\geqslant \int_{\theta_1}^{\theta_2} a d\theta = a(\theta_2 - \theta_1)$$

$a(\theta_2 - \theta_1)$ 为连结此二点的大圆弧长。而且只有 $\varphi(\theta) = 0$ 即大圆时等号才成立。

一般地说，在曲面上的一曲线下列二性质等价。

（1）展开之得直线

（2）连结此线上任意邻近两点的各种曲线之中，此线的弧长最短。

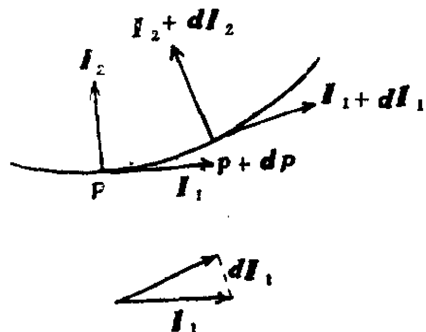
关于这个性质以后在一般的黎曼空间中证明。

测地曲率（geodesic curvature） 沿曲面 S 上的曲线 c 展开在平面上，由(5.3)可见，

$$(d\boldsymbol{p}, d\boldsymbol{p}) = (\alpha_1 dt\boldsymbol{I}_1 + \alpha_2 dt\boldsymbol{I}_2,\ \alpha_1 dt\boldsymbol{I}_1 + \alpha_2 dt\boldsymbol{I}_2)$$

$$= (\alpha_1 dt)^2 + (\alpha_2 dt)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = ds^2$$

即设将 c 展开而得曲线为 c'，则在 c 与 c' 上对应的弧长相等。



第 3.20 图

设 c 的弧长为 s，在 c 上各点处的单位切向量取做 $\boldsymbol{e}_1$，选正交标架，则(5.3)中 $\alpha_2 = 0$。故得

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \boldsymbol{I}_1,\quad \frac{d\boldsymbol{I}_1}{ds} = \alpha_{12}\boldsymbol{I}_2 \qquad (5.4)$$

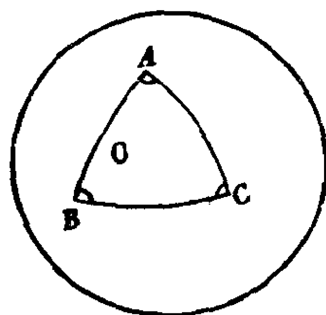
α_{12} 为展开曲线 c' 的曲率。称之为 S 上曲线在对应点的**测地曲率**。

测地线是测地曲率为 0 的曲线。

§6　高斯·崩尼定理

在球面上取不在一个大圆上的三点A,B,C，并以大圆的劣弧连结之，则将球面分为两部分。其中小者是球面三角形 ABC。设其三角为A，B，C，如所周知，

$$A+B+C=\pi+\frac{S}{r^2}.$$



第 3.21 图

式中r为球面的半径，S为球面三角形的面积。即球面三角形的内角之和不是180°，比它要大$\frac{S}{r^2}$。在更一般的曲面上论证此性质者是高斯·崩尼定理。

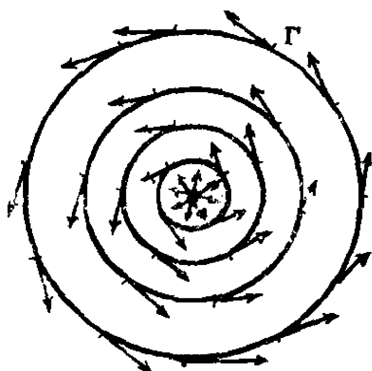
在曲面的切平面上取正交标架 e_1，e_2，则线素可写做

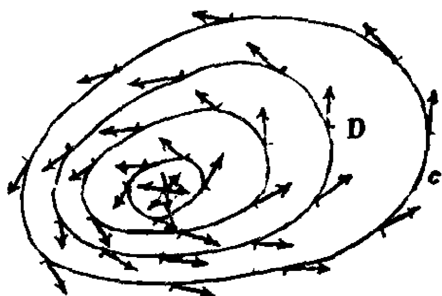
$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2$$

还有

$$d\omega_1=\omega_2\wedge\omega_{21},\quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}$$

$$d\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2$$





第 3.22 图

再取$\bar{e}_1$，$\bar{e}_2$ 使得

$$\bar{e}_1=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2,$$

$$\bar{e}_2=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2$$

考虑相对应的 $\bar{\omega}_1$，$\bar{\omega}_2$，$\bar{\omega}_{12}$，则如(3.10)所述

$$\bar{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\theta\quad(6.1)$$

今在一平面上有半径1的圆Γ，考虑它在曲面上的 C^2 级同胚映射。设此域为D，边界为c。与圆Γ有相同圆心，作半径为r（$0<r\leqslant 1$）的圆Γ_r，将这些圆的切线按上述同胚映射变到D上，则得向量场在Γ的圆心O的象A处有奇点。这样得到的单位向量场取做$\bar{e}_1$，考虑由(6.1)决定

的 $\overline{\omega}_{12}$。

设从D去掉圆 Γ_ε 的象 c_ε 的内部而得的域为 D_ε，将格林定理（p.23）运用在此域上得

$$\iint_{D_\varepsilon} d\overline{\omega}_{12} = \int_c \overline{\omega}_{12} - \int_{c_\varepsilon} \overline{\omega}_{12} \tag{6.2}$$

由(3.25)知 $d\omega_{12} = -KdS$，故

$$\iint_{D_\varepsilon} d\overline{\omega}_{12} = -\iint_{D_\varepsilon} KdS \tag{6.3}$$

又因 $\overline{e}_1$ 为 c 的切线，故由(5.4)知 $\overline{\omega}_{12}$ 为

$$\overline{\omega}_{12} = kds$$

式中 ds 为曲线 c 的弧长的微分，k 为曲线 c 的测地曲率（参照 p.75）。再由(6.1)得

$$\int_{c_\varepsilon} \overline{\omega}_{12} = \int_{c_\varepsilon} \omega_{12} + \int_{c_\varepsilon} d\theta \tag{6.4}$$

令 $\varepsilon \to 0$，因 c_ε 收缩于一点，故 $\int_{c_\varepsilon} \omega_{12} \to 0$。又知

$$\int_{c_\varepsilon} d\theta \to 2\pi$$

将(6.3)，(6.4)代入(6.2)，并令 $\varepsilon \to 0$，则

$$-\iint_D KdS = \int_c kds - 2\pi$$

即

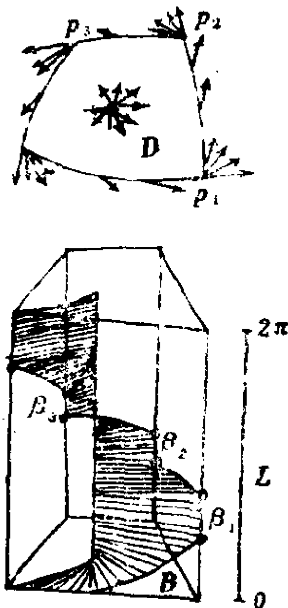
$$\iint_D KdS = 2\pi - \int_c kds \tag{6.5}$$

这是 c 为光滑曲线情况下的高斯·崩尼(Gauss-Bonnet)定理。

其次，在平面上取凸多角形 $q_1q_2\cdots q_n$ 代替圆，以 B 记之，设它在曲面内的同胚映射为 $p_1p_2\cdots p_n$。设此域为 D，边界为 c，考虑 c 的切线，这时在 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 处的切线不确定。这时在各顶点 p_i 补充上从曲线弧 $p_{i-1}p_i$ 的切线向曲线弧 p_ip_{i+1} 的切线旋转的所有单位向量如图所示。在这种情况下，在D中也能作出向量场，它在D中有奇点，在 c 上是切线， $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为其奇点。

现在考虑B与单位圆周L的直积 $B\times L$，则B的坐标u_1，u_2与L的坐标$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$的组合$u_1$，$u_2$，$\theta$可看做直积中的坐标。在此三维空间$B\times L$中，如上所作有奇点的向量场作成二维子集。在$c$的各顶点$p_i$，向量是由$(u_1, u_2,\theta)(u_1,u_2$为固定点$p_i$的坐标）表示的线段$\varphi_i\leqslant\theta\leqslant\varphi_i+\beta_i$。其中$\beta_i$是在点$p_i$向两边引的切线所成的角，即由曲线弧而成$n$角形的外角，设内角为$\alpha_i$，则

$$\beta_i=\pi-\alpha_i \qquad (6.6)$$



第 3.23 图

如果使用点A的坐标a_1，a_2与$0\leqslant\theta<2\pi$的θ，则在A的向量全体是由(a_1,a_2,θ)表示的线段。于是在对应于此向量场的$B\times L$而成的面上考虑$\overline{\omega}_{12}=\omega_{12}+d\theta$，运用格林定理则得

$$\iint d\overline{\omega}_{12}=\sum_i\int_{c_i}\overline{\omega}_{12}+\sum_i\beta_i-2\pi$$

故

$$-\iint KdS=\sum_i\int_{c_i}kds+\sum_i\beta_i-2\pi$$

运用(6.6)得

定理 3.6 $$\iint_D KdS=\sum_i\alpha_i-(n-2)\pi-\sum_i\int_{c_i}kds \qquad (6.7)$$

这是**高斯·崩尼定理的扩充。**

特别当各c_i全是测地线时$k=0$，则

$$\iint_D KdS=\sum_i\alpha_i-(n-2)\pi \qquad (6.8)$$

当$n=3$时

$$\iint_D KdS=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi \qquad (6.9)$$

在半径 r 的球面上，因$K=\frac{1}{r^2}$，故得

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi=\frac{S}{r^2}$$

这是**球面三角形的内角和公式。**

到目前为止考虑了曲面上的域，以下考虑把这样几个域贴在一起而得的曲面M。这时，设曲面有表有里（即可定向），又设在贴合处是光滑的（于此处无暇叙述此性质的正确说法。欲问其详请见 p.106）

今设曲面S是上述 f 个小域 $\varDelta_1$，$\varDelta_2,\cdots,\varDelta_f$ 经贴合而成的，而且各$\varDelta_i$ 是证明(6.9)时出现的由曲线弧而成的三角形D。于是

$$\iint_{\varDelta_i}KdS=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi-\int_{\Gamma_1}kds-\int_{\Gamma_2}kds-\int_{\Gamma_3}kds$$

式中 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$ 是 $\varDelta_i$ 的三边。

关于所有的$\varDelta_i$，相加此式，则相邻边上的$\int kds$ 相抵消。再设这些三角形的顶点数为 v，则

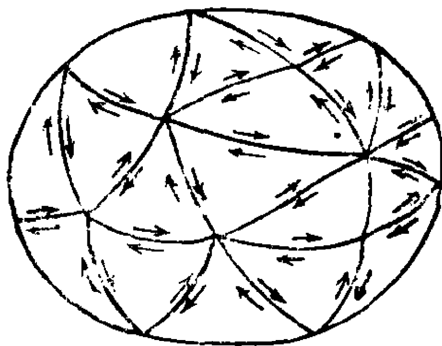
$$\iint_M KdS=2\pi v-\pi f \qquad (6.10)$$

f 个三角形的边数共有 $3f$ 个，这个数目把边数各算过两次，故

$$3f=2e$$

于是

$$2\pi(v-e+f)=\pi(2v-2e+2f)$$
$$=\pi(2v-f)$$



第 3.24 图

一般地说，将M剖分成三角形，设

$v=$顶点数，$e=$边数，$f=$三角形数，

人们知道 $$\chi=v-e+f$$

是与剖分无关的数。称此数为**欧拉·庞加莱示性数。**故（6.10）变为

定理 3.7

$$\iint_M K dS = 2\pi\chi \tag{6.11}$$

此式也称为**高斯·崩尼定理**。如所周知，象圆环面状的曲面 $\chi=0$，故对于这样的曲面总是 $\iint_M K dS = 0$。

§7 非欧平面

以前，如果在曲面上使用曲线坐标 u_1, u_2，则线素 ds 可用

$$ds^2 = \sum_{i,j=1,2} g_{ij} du_i du_j \tag{7.1}$$

表示，通过它讨论了曲面的各种性质。若是抛弃曲面这个具体形象，抽象地讨论这些性质，就是二维黎曼空间。

一般地说，由两个值 u_1，u_2 决定之物称为点，考虑点集 M。这时，将 (u_1, u_2) 看做平面上点的坐标，设此点在某域 D 中移动。假设 M 中的弧长的微分 ds 由(7.1)给定，它是 du_1，du_2 的二次形式并且是正定的。这样的点 (u_1, u_2) 的集 M 称为**二维黎曼空间**。当然，这是局部东西，整体黎曼几何容后详述。

在这种情况下，适当选择 du_1，du_2 的线性组合 ω_1, ω_2 可使

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$

和曲面的情况全完一样，再通过 $d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}$，$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$ 决定 ω_{12}，从

$$-d\omega_{12} = K\omega_1 \wedge \omega_2$$

决定 K。称此 K 为二维黎曼空间的**曲率**，而沿此黎曼空间中的曲线 $u_1 = u_1(t)$，$u_2 = u_2(t)$ 展开在平面上，形式上也和曲面的情况相同。

但是，有和曲面的情况不同的，在这里考虑的黎曼空间里尚未决定切平面这种概念。因此，即使谈论展开并没有具体的几何意义。在本书里，从现在开始，对 n 维黎曼空间按自然的方式定义相当于切平面的切空间，设法推广在曲面论里讨论的诸种概念，运用这些再作各种研究。

在这里即使不用切平面这样概念，只通过(7.1)就可探索到的二维黎曼空间的性质，以著名的非欧平面为例进行考察。

伪球（pseudo-sphere） 在空间里，考虑关于笛卡儿坐标(x_1，x_2，x_3)由

$$c(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=1 \quad (7.2)$$

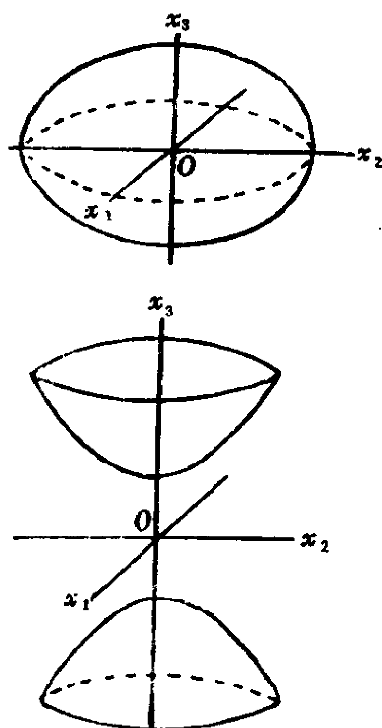
（c 为非零常数）

表示的曲面。这个曲面

当 $c>0$ 时，是回转椭球面

当 $c<0$ 时，是回转双叶双曲面

特别当 $c=1$ 时，是球面。一般地由(7.2)表示的曲面称为**伪球**。



第 3.25 图

现在使用向量符号，设

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$，

定义$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$为

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\frac{1}{c}x_3y_3$$

则(7.2)可写为

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\frac{1}{c} \quad (7.3)$$

于是考虑在线性变换

$$y_i=\sum_{j=1}^{3}p_{ij}x_j \quad (i=1,2,3) \qquad (7.4)$$

下，将 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 变为 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$ 的映射中使

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle \qquad (7.5)$$

者。若 $c=1$，则(7.4)为正交变换，(p_{ij})作成的行列式 $\det(p_{ij})=\pm1$，但一般情况也是 $\det(p_{ij})=\pm1$。设这样的线性变换为P，它的全体为G，则G成为变换群。即

（1） G包含恒等变换。

（2） 若变换P属于G，则其逆变换也属于G。

（3） 若变换P，Q属于G，则其复合 PQ 也属于G。

又在G中，$\det(p_{ij})=1$ 的变换也成群。以 G_0 记之。

变换群G将伪球(7.3)变为它自己。而且，又能证明

定理 3.8 变换群G将伪球的任意点变为任意点。

证明 先证明任意点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$变为 $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$。首先是

$$y_1=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta,\quad y_2=x_1\sin\theta+x_2\cos\theta,\quad y_3=x_3 \tag{7.6}$$

满足 $y_1^2+y_2^2=x_1^2+x_2^2$，故得$\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle$，因此这个变换属于$G$。在此变换下，可将曲面上的任意点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$变为 $(b,0,a_3)$。

其次，设$c>0$，$\sqrt{c}=k$，则在

$$\begin{aligned}y_1&=x_1\cos\alpha-k^{-1}x_3\sin\alpha\\y_2&=x_2\\y_3&=k(x_1\sin\alpha+k^{-1}x_3\cos\alpha)\end{aligned} \tag{7.7}$$

下，$y_1^2+\frac{1}{c}y_3^2=x_1^2+\frac{1}{c}x_3^2$，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle$。

再设$c<0$，$\sqrt{-c}=k$，则在

$$\begin{aligned}y_1&=x_1\cosh\alpha+k^{-1}x_3\sinh\alpha\\y_2&=x_2\\y_3&=k(x_1\sinh\alpha+k^{-1}x_3\cosh\alpha)\end{aligned} \tag{7.8}$$

下，仍然 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle$。

在变换(7.7)，(7.8)下，可将点$(b,0,a_3)$变为 $(0,0,\pm1)$。

最后，在G的变换

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_2,\quad y_3=-x_3$$

下，$(0,0,-1)$变为$(0,0,1)$。

再者，将任意点 $\boldsymbol{a}$ 变为任意点 $\boldsymbol{b}$ 的G的变换，可通过将 $\boldsymbol{a}$ 变为点 $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$的变换 P_a 以及将 $\boldsymbol{b}$ 变为 $\boldsymbol{e}$ 的变换 P_b，作出 $P_b^{-1}P_a$ 即得（证毕）。

注 1 只考虑曲面(7.2)的 $x_3>0$ 那部分时，G_0将任意点变为任意点。

注 2 (7.7)，(7.8)是保持点 $\boldsymbol{e}=(0,0,1)$ 不变，将伪球变为自

己的变换。在此变换下，在点 e 的任意方向变为任意方向。

在伪球上，与以前的欧氏空间不同，决定曲线长的线素 ds 由

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{1}{c}dx_3^2 = \langle d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}\rangle \qquad (7.9)$$

给定时，在变换(7.4)下，此线素不变。即

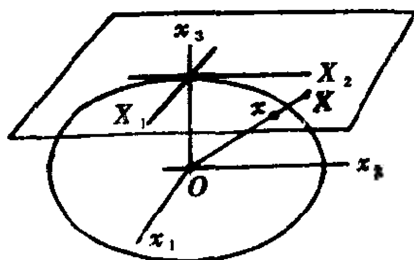
$$dy_1^2 + dy_2^2 + \frac{1}{c}dy_3^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{1}{c}dx_3^2$$

原因是，因 p_{ij} 是常数，变换(7.4)$(x_1, x_2, x_3) \to (y_1, y_2, y_3)$与变换 $(dx_1, dx_2, dx_3) \to (dy_1, dy_2, dy_3)$ 服从相同的规律。故得下列

定理 3.9 设伪球的线素为 (7.9)，则变换群G是伪球的等距变换群。

非欧平面(non-euclidean plane) 今考虑伪球 (7.2) 的 $x_3>0$ 那部分，记以S。设S上的点 $\boldsymbol{x}$ 与原点的连结直线和平面 $x_3=1$ 的交点为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, 1)$，则

$$\frac{X_1}{x_1} = \frac{X_2}{x_2} = \frac{1}{x_3}$$



第 3.26 图

以及

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{c}x_3^2 = \frac{1}{c}$$

由此得

$$x_1 = x_3 X_1, \ x_2 = x_3 X_2,$$
$$x_3 = (1 + c(X_1^2 + X_2^2))^{-1/2} \qquad (7.10)$$

令 $p = 1 + c(X_1^2 + X_2^2)$，用 X_1, X_2 表示(7.9)的 ds^2 则得

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{1}{c}dx_3^2 = \sum_{i=1}^{2} dx_i^2 + \frac{1}{c}dx_3^2$$

$$= \sum_i (dx_3 X_i + x_3 dX_i)^2 + \frac{1}{c}dx_3^2$$

$$= \frac{1}{c}p\,dx_3^2 + 2x_3 dx_3 \sum_i X_i dX_i + x_3^2 \sum_i dX_i^2$$

$$= \frac{1}{p^2}\left(c\left(\sum_i X_i dX_i\right)^2 - 2c\left(\sum_i X_i dX_i\right)^2 + p\sum_i dX_i^2 \right)$$

故
$$ds^2 = \frac{dX_1^2 + dX_2^2 + c(X_1 dX_2 - X_2 dX_1)^2}{(1 + c(X_1^2 + X_2^2))^2} \quad (7.11)$$

今后称平面 $x_3 = 1$ 为平面 α，在 α 上的点 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, 1)$ 给定黎曼度量(7.11)。方才是在 $c \neq 0$ 的假设下讨论的，如果在(7.11)里令 $c = 0$，则得普通的欧氏度量

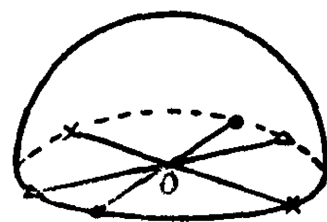
$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2.$$

以下分为 $c>0$，$c<0$ 两种情况考虑。在这里处理 $c = 1$，$c = -1$ 两种情况。其实，本质的性质在这两种情况下也就讨论无遗了。

$c = 1$ 的情况。这时，在点对应 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \to \boldsymbol{X} = (X_1, X_2, 1)$ 下，半球面

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad x_3 > 0$$

与平面 α 成一一对应，但有稍许不合适的地方。问题就是，在群 G 的变换（现在是绕原点的回转）中，考虑将 $\boldsymbol{e} = (0, 0, 1)$ 变为点 $(1, 0, 0)$ 者，则在平面 α 上，$X_1 = 0$，$X_2 = 0$ 的点 $(0, 0)$ 就没有去处了。于是，给平面 α 添上球面上 $x_3 = 0$ 的点中满足



第 3.27 图

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_2 > 0$$

的点 $(x_1, x_2, 0)$ 以及对应于点 $(1, 0, 0)$ 的点。而且在曲面的连结上规定如下。根据

在圆 $x_1^2 + x_2^2 = 1$，$x_3 = 0$ 上，使点 $(x_1, x_2, 0)$ 与点 $(-x_1, -x_2, 0)$ 重合

使圆周自相粘在一起。众所周知，这样作出的面没有表里的区别（欲见其详，请见 $p.108$ 所述）。

给平面 α 添上这样的点而得的平面称为**射影平面**（projective plane)。在射影平面上导入黎曼度量(7.9)而得黎曼空间称为**椭圆平面**(elliptic plane)。

这时，使用球坐标，则球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 上的点(x_1,x_2,x_3)可表示为

$$x_1=\sin\theta\cos\varphi,\quad x_2=\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3=\cos\theta \tag{7.12}$$

故由(7.10)可见，$X_1=\tan\theta\cos\varphi$，$X_2=\tan\theta\sin\varphi$，(7.11)变为

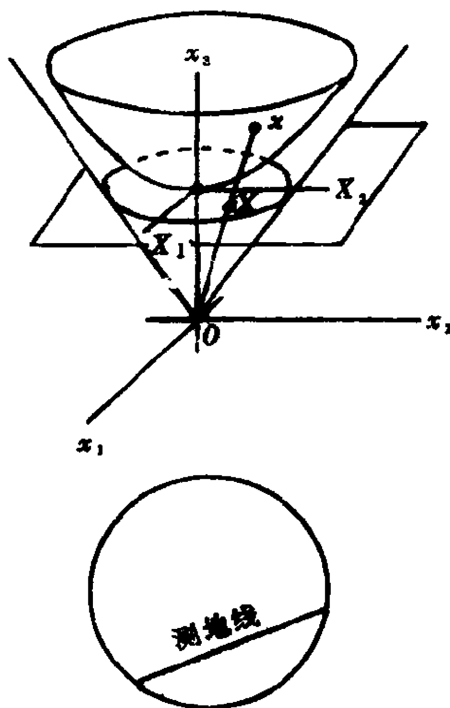
$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{7.13}$$

于是，问题直接归结为众所周知的事实（参照 p. 53）．我们已经知道这个黎曼度量的曲率是1．

当 $c=-1$ 的情况。这时在点对应 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\to\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,1)$下，双曲面的一半

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=-1,\quad x_3>0$$

与平面 α 上的圆的内部 $X_1^2+X_2^2<1$ 一一对应，在此圆内部给定黎曼度量(7.9)($c=-1$) 而得黎曼空间称为**双曲平面**(hyperbolic plane)。



第 3.28 图

这时，使用变数 θ，φ，则(7.2)可表示为

$$x_1=\sinh\theta\cos\varphi,$$
$$x_2=\sinh\theta\sin\varphi, \tag{7.14}$$
$$x_3=\cosh\theta$$

由(7.10)得

$$X_1=\tanh\theta\cos\varphi,\quad X_2=\tanh\theta\sin\varphi \tag{7.14'}$$

故(7.11)变为

$$ds^2=d\theta^2+\sinh^2\theta d\varphi^2 \tag{7.15}$$

将(7.14)直接代入 $ds^2=dx_1^2+dx_2^2-dx_3^2$ 也可得到上式．此黎曼空间的曲率为-1。

椭圆平面与双曲平面称为**非欧平面**。

从(7.13)，(7.15)可见，在

$$\varphi=一定 \tag{7.16}$$

的曲线 c 上考虑充分近的任意二点，则连结此二点的其他曲线的弧长比 c 的弧长长（参照 p. 75）．即(7.16)的曲线是测地线．

由(7.12)，(7.14)可见，曲线(7.16)可由方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad (a_1, a_2\text{一定}) \tag{7.17}$$

表示．保持 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ 不变的线性变换(7.4)，即G的变换是等距变换，故测地线应变为测地线．此外，(7.17)变为

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \tag{7.18}$$

的形状．在非欧平面上，它相当于直线

$$b_1X_1 + b_2X_2 + b_3 = 0$$

因此，此直线是非欧平面上的测地线．但当 $b_1 = 0$，$b_2 = 0$ 时，相当于椭圆平面的无穷远直线．再者，(7.18)型的任意直线可从(7.17)在G的变换下得到．这从存在G的变换将(7.18)的一点 (x_1, x_2, x_3) 变为(0,0,1)可以理解．

因此得到

非欧平面的测地线是直线．

但是，非欧平面上的直线之长，角的大小和将此平面看做欧氏平面时的长与大小不一样．表示这些量的公式在许多微分几何书里都有记载，在这里从略．

再设点(0,0,－1)与伪球(7.3)上的点 (x_1, x_2, x_3) 的连结直线与平面$x_3 = 1$的交点为$(u_1, u_2, 1)$，则

$$\frac{x_1}{u_1} = \frac{x_2}{u_2} = \frac{x_3 + 1}{2} \quad (= \lambda)$$

由此得 $x_1 = \lambda u_1$，$x_2 = \lambda u_2$，$x_3 = 2\lambda - 1$

$$\lambda = \left(1 + \frac{c}{4}(u_1^2 + u_2^2)\right)^{-1}$$

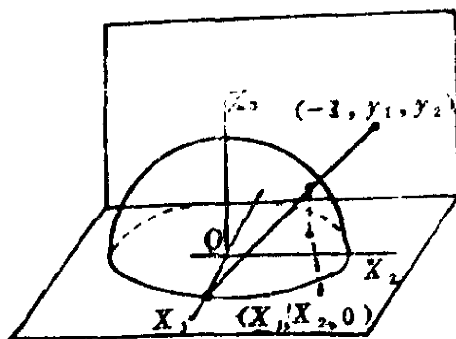
将这些式子代入(7.9)得

$$ds^2 = \frac{du_1^2 + du_2^2}{\left(1 + \frac{c}{4}(u_1^2 + u_2^2)\right)^2} \tag{7.19}$$

于是令
$$z=u_1+\sqrt{-1}\,u_2$$
则
$$ds^2=\frac{dzd\bar{z}}{\left(1+\frac{c}{4}z\bar{z}\right)^2} \tag{7.20}$$
这种表示方法也很重要。

令$c=1$，则(7.19)相当于 $p.58$ 所述的极射影。

双曲平面的庞加莱表示 方才将双曲平面表示在单位圆的内部，但也有稍许不同的表示法。首先把$X_3=0$看做平面 α，则双曲平面是
$$X_1^2+X_2^2<1, \quad X_3=0 \tag{7.21}$$
然后，在点 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,0)$ 作此平面的垂线，求与半球面
$$X_1^2+X_2^2+X_3^2=1, \quad X_3>0$$
的交点，则得点
$$\boldsymbol{Y}=(X_1,X_2,\sqrt{1-X_1^2-X_2^2})$$
现在从点(1,0,0)将此点Y射影之，设与平面 $X_1=-1$ 的交点为$(-1,y_1,y_2)$，则

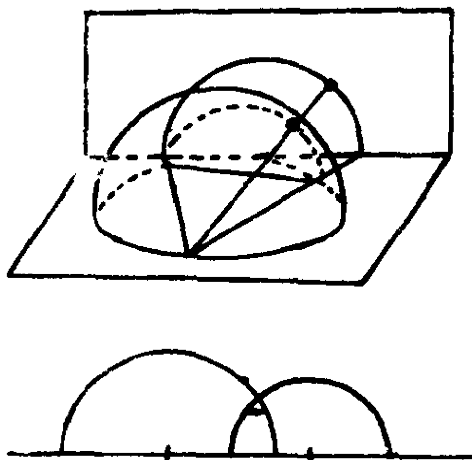


第 3.29 图

$$\frac{y_1}{X_2}=\frac{y_2}{\sqrt{1-X_1^2-X_2^2}}$$
$$=\frac{-2}{X_1-1}$$
将(7.14′)代入之，求 y_1,y_2 得
$$y_1=\frac{2\tanh\theta\sin\varphi}{1-X_1},\quad y_2=\frac{2\operatorname{sech}\theta}{1-X_1} \quad (X_1=\tanh\theta\cos\varphi)$$
由此计算 $dy_1^2+dy_2^2$ 得
$$\frac{dy_1^2+dy_2^2}{y_2^2}=d\theta^2+\sinh^2\theta d\varphi^2 \tag{7.22}$$
按照这种操作，(7.21)一一映射在 $X_1=-1$ 的上半平面 $y_2>0$ 上，而且用这个平面上的直角坐标 y_1，y_2，黎曼度量可表示为
$$ds^2=\frac{dy_1^2+dy_2^2}{y_2^2} \tag{7.23}$$

故以 (y_1, y_2) 为点的直角坐标的欧氏平面与以(7.23)为黎曼度量的上半平面M成保角映射．在此二维黎曼空间里，测地线是与$y_2=0$垂直的半圆。原因是在双曲平面上，测地线是直线。根据方才讲的映射此线在半球面 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ $(x_3>0)$上的象与大圆 $x_3=1$ 正交。从点 $(1,0,0)$向平面 $x_3=-1$ 上射影之，因为是极射影（参照 p.58），将圆映射为圆，又是保角映射，所以上述曲线变为与 $y_2=0$ 正交的圆。故知

关于黎曼度量(7.22)，测地线是与直线 $y_2=0$ 正交的圆。



第 3.30 图

习　题　三

1　在平面上有定点O，对于任意点P，在半直线OP上，取

$$OP \cdot OQ = k \ (\text{一定})$$

的点Q．这样将Q与P对应之时，称此对应为**反演**。试证反演是保角映射。

2　根据 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 将复数 w 与复数 z 对应之，则得从复平面到复平面的保角映射。这时，当 z 分别在

（1）通过原点的直线上　（2）以原点为中心的圆

上移动时，问 w 在什么线上移动？这时，从映射的保角性能知道什么？

3　将下列曲线绕 x_1 轴回转一周而得曲面，试求其高斯曲率 $(a>0)$．

（1）$x_2=a\cosh\dfrac{x_1}{a}$

（2）$x_1=a(t-\sin t)$，　$x_2=a(1-\cos t)$

4 在曲面上，设线素 ds 可由

$$ds^2 = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2$$

表示，试证面素是

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,du_1 \wedge du_2$$

5 关于曲面 $x_3 = f(x_1, x_2)$，令 $p_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$，$p_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$，则高斯曲率$K$是

$$K = \frac{1}{(1 + p_1^2 + p_2^2)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right]$$

试按下述方法导出。

（1）此曲面的线素为

$$ds^2 = (1 + p_1^2)dx_1^2 + 2p_1p_2dx_1dx_2 + (1 + p_2^2)dx_2^2$$

故面素为 $dS = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}\,dx_1 \wedge dx_2$

（2）设在曲面上各点引的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，则决定原点后，以 $\boldsymbol{n}$ 为位置向量的点的轨迹是单位球面的一部分（球面表示）。此球面上的线素是

$$ds_0^2 = \frac{(1 + p_2^2)dp_1^2 - 2p_1p_2dp_1dp_2 + (1 + p_1^2)dp_2^2}{(1 + p_1^2 + p_2^2)^2}$$

故面素为

$$d\sigma = \frac{dp_1 \wedge dp_2}{(1 + p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}$$

（3）从(1)，(2)的结果，根据 $d\sigma = KdS$ 求K。

6 运用前题结果，试求抛物面 $x_3 = \dfrac{1}{2}(a_1x_1^2 + a_2x_2^2)$ 的高斯曲率。又当 $a_1a_2 = b_1b_2$ 时，二抛物面

$$x_3 = \frac{1}{2}(a_1x_1^2 + a_2x_2^2), \quad x_3 = \frac{1}{2}(b_1x_1^2 + b_2x_2^2)$$

之间，前曲面上的 $x_1 = p_1$，$x_2 = p_2$ 点与后曲面的 $x_1 = a_1p_1/b_1$，$x_2 = a_2p_2/b_2$ 的点对应之，在对应点高斯曲率相等，但不是等距对应。试由此推导之，

7 在空间曲线上各点引切线所作曲面与欧氏平面局部等距．试证明之。

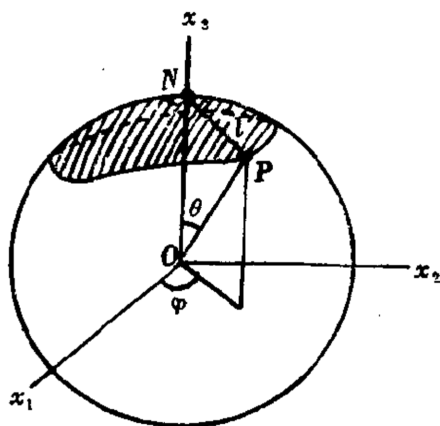
8 试证抛物面 $x_3=a_1x_1^2-a_2x_2(a_1>0,\ a_2>0)$ 是直纹面（由直线生成的面），但高斯曲率不是 0．

9 回转面的线素是 $ds^2=d\sigma^2+f(\sigma)^2\ d\theta^2$。试求此面上的测地线的微分方程。

10 关于球面上的球坐标（a,θ,φ），令 $p=a^2(1-\cos\theta)d\varphi$，则面素可表示为 $dp=\sin\theta d\theta\wedge d\varphi$。由此试证球面上的域$D$的面积是

$$S=\frac{1}{2}\int_c l^2 d\varphi$$

其中 c 为D的边界，l 为从 $N(a,0,0)$ 到边界 c 的点的距离。



第 3.31 图

第四章　微　分　流　形

§1　向量空间

一开始先讲以实数为基础的 n 维向量空间，在这里实数用 k，l，……等字母表示。今有集 V，它的元记做 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，…，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，……，假设它们之间满足以下各性质。

（Ⅰ）　对于 V 的任意元 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与实数 k，可以考虑 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$k\boldsymbol{a}$，它们仍然属于 V。

（Ⅱ）　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

（Ⅲ）　$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，　$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$，

$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$

（Ⅳ）　$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

（Ⅴ）　对于 V 的任意元 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，存在 V 的元 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$。

这时，称 V 为**向量空间**（vector space），其元 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…，$\boldsymbol{x}$，……等称为**向量**，$k\boldsymbol{a}$ 也记做 $\boldsymbol{a}k$。

（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅳ）说明向量之和以及与数之积和通常的式子一样可作相同的运算．又如再使用（Ⅴ），，则满足

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a} \tag{1.1}$$

的 $\boldsymbol{x}$ 对于所有的 $\boldsymbol{a}$ 只存在一个，而且它对于各 $\boldsymbol{a}$ 是共通的，这通过下面的讨论可以理解。称此向量为**零向量**，记以 0 。

首先，对于任意的 $\boldsymbol{b}$，由（Ⅴ）知存在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 的 $\boldsymbol{c}$，将此 $\boldsymbol{c}$ 加在（1.1）的两边，再用（Ⅱ）得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$．即满足（1.1）的 $\boldsymbol{x}$ 对于 $\boldsymbol{b}$ 也通用，都是共通的．其次证明只有一个。假设在（1.1）之外又有满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{a}$ 的 $\boldsymbol{x}'$，这时将满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'$ 的 $\boldsymbol{y}$ 加在(1.1)的两边，则 $\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$。同理，将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{z}$ 加在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{a}$ 的

两边，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$。故 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$。

在向量空间V里，对于向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ 与实数 k_1，k_2，…，k_r（设至少一个不是0），当

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r=0 \qquad (1.2)$$

成立时，则称 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ **线性相关**（linearly dependent）。这时，在 k_1，k_2，…，k_r 中不是0的至少有一个，例如设 $k_r\neq 0$，则

$$\boldsymbol{a}_r=-\frac{k_1}{k_r}\boldsymbol{a}_1-\frac{k_2}{k_r}\boldsymbol{a}_2-\cdots-\frac{k_{r-1}}{k_r}\boldsymbol{a}_{r-1}$$

相反，如果从（1.2）的关系必然得到

$$k_1=0, \quad k_2=0, \quad \cdots, \quad k_r=0$$

时，则称 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ 是**线性无关**（linearly independent）。

在向量空间V里，如果有 n 个线性无关的向量，任意 $n+1$ 个向量都是线性相关时，称V是 n 维的。以后我们加上假设

（Ⅵ） 向量空间V是 n 维的

来考虑。这时，取线性无关向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$，则对于任意的$\boldsymbol{x}$，它和 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 一道考虑，因为是线性相关，故有 k_0，k_1，…，k_n（至少一个不是0）使得

$$k_0\boldsymbol{x}+k_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n=0$$

因 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关，故 k_0 不是0。于是令 $x_i=-k_i/k_0$（$i=1, 2, \cdots, n$），则

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

称此 x_1，x_2，…，x_n 为以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 为基底时 $\boldsymbol{x}$ 的**分量**。对于这样的 x_1，x_2，…，x_n，将指标 1，2，…，n 写在上面，记做 x^1，x^2，…，x^n（平方时，例如记做 $(x^1)^2$）。按照这种记法，则

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x^i\boldsymbol{e}_i=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n \qquad (1.3)$$

当二向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的分量分别为（x^1，x^2，…，x^n），（y^1，y^2，…，y^n）时，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 的分量为（x^1+y^1，x^2+y^2，…，x^n+y^n），$k\boldsymbol{x}$ 的分量为（kx^1，kx^2，…，kx^n）。

其次，关于基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$，考虑

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i=\sum_{j=1}^{n}p_i{}^j\boldsymbol{e}_j=p_i{}^1\boldsymbol{e}_1+p_i{}^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+p_i{}^n\boldsymbol{e}_n\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.4}$$

式中 $p_i{}^j$ 的 j 也是指标。第 i 行，第 j 列元素为 $p_i{}^j$ 的行列式假设不是0。于是易证 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，…，$\overline{\boldsymbol{e}}_n$ 也是线性无关，故可取它为基底。此时，设向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量为 $\overline{x}^1$，$\overline{x}^2$，…，$\overline{x}^n$，则

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^i\overline{\boldsymbol{e}}_i\tag{1.5}$$

将（1.4）代入（1.5）得

$$\boldsymbol{x}=\sum_i\overline{x}^i\left(\sum_j p_i{}^j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j}\overline{x}^ip_i{}^j\boldsymbol{e}_j=\sum_j\left(\sum_i\overline{x}^ip_i{}^j\right)\boldsymbol{e}_j$$

$$=\sum_i\left(\sum_j\overline{x}^jp_j{}^i\right)\boldsymbol{e}_i$$

与（1.3）比较之得

$$x^i=\sum_{j=1}^{n}\overline{x}^jp_j{}^i\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.6}$$

设矩阵 $(p_j{}^i)$ 的逆矩阵为 $(q_i{}^j)$。即

$$\sum p_j{}^iq_i{}^k=\delta_j{}^k=\begin{cases}1 & (j=k\ 时)\\ 0 & (j\neq k\ 时)\end{cases}\tag{1.7}$$

于是（1.6）的两边乘以 $q_i{}^k$ 关于 i 相加得

$$\overline{x}^k=\sum_{i=1}^{n}q_i{}^kx^i$$

今后，象（1.5），（1.6），（1.7）这样求和的式子出现很多，全都去掉求和的记号只记做

$$x^i\boldsymbol{e}_i,\qquad\overline{x}^jp_j{}^i,\qquad q_i{}^kx^i.$$

即若在上面的指标与在下面的指标是一样字母，即使不写求和记号，含义也是关于这些字母相加。各项不是乘积的情况也这样作。例如

$$\sum_{i=1}^{n}p_i{}^i=p_i{}^i,\qquad\sum_{i=1}^{n}T_{ij}{}^i=T_{ij}{}^i$$

按照这种写法，上面得到的基底变换与向量分量的变换间的关系可以叙述成

定理 4.1 设关于基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{x}$ 的分量为 $x^1, \cdots, x^n$；关于基底 $\overline{\boldsymbol{e}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}}_n$ 的分量为$\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n$；令基底的变换为

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j$$

则 $\boldsymbol{x}$ 的分量的变换式为

$$\overline{x}^i = q_j{}^i x^j$$

式中 $(q_i{}^j)$为$(p_i{}^j)$ 的逆矩阵（下指标表示行数，上指标表示列数）。

对偶向量空间 (dual vector space) 有一函数 $f(\boldsymbol{x})$ 给向量空间V的各元 $\boldsymbol{x}$ 对应以一实数，假设它有下列性质。

当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$时，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$，$f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$ 这样的 f 称为**线性函数**。对于二函数 f_1，f_2，定义和 f_1+f_2 与 kf (k 是实数) 如下：

$$(f_1+f_2)(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) + f_2(\boldsymbol{x}), \qquad (kf)(\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$$

可见，V的线性函数全体作成向量空间。称此向量空间为V的**对偶空间**，以 V^* 记之。

今设V为 n 维，取基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，设 $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$（即 x^1，$x^2, \cdots, x^n$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量），则对于线性函数 f

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x^i \boldsymbol{e}_i) = x^i f(\boldsymbol{e}_i)$$

于是令 $f(\boldsymbol{e}_i) = a_i$，则

$$f(\boldsymbol{x}) = a_i x^i \tag{1.8}$$

即使用分量时，$f(\boldsymbol{x})$ 变成 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的一次式。再考虑由

$$f^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

而定的线性函数 f^i，则 $f^i(\boldsymbol{x}) = x^i$，(1.8) 变为

$$f(\boldsymbol{x}) = a_i f^i(\boldsymbol{x}).$$

故将 $f, f^1, f^2, \cdots, f^n$ 看做 V^* 的向量，分别记做 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}^1$，$\boldsymbol{f}^2$，$\cdots$，$\boldsymbol{f}^n$，则可表示为

$$\boldsymbol{f} = a_i \boldsymbol{f}^i,$$

$\boldsymbol{f}^1$, …, $\boldsymbol{f}^n$ 为 V^* 的基底。这个基底称为V 的基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 的**对偶基底**（dual base）。

有时将实数值 $f(\boldsymbol{x})$ 记做 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle$。于是当

$$\boldsymbol{f} = a_i \boldsymbol{\varphi}^i, \quad \boldsymbol{x} = b^j \boldsymbol{y}_j$$

时

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle = a_i b^j \langle \boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{y}_j\rangle$$

即 $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}\rangle$ 关于 $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{x}$ 是双线性的。

特别是对于对偶基底

$$\langle \boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_j{}^i \quad (i \neq j \text{ 时为 } 0, \ i = j \text{ 时为 } 1)$$

故得

$$\langle a_i \boldsymbol{f}^i, b^i \boldsymbol{e}_j\rangle = a_i b^i$$

今对于V的基底变换 $\boldsymbol{e}_i \to \overline{\boldsymbol{e}}_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j$，设它们的对偶基底 $\boldsymbol{f}^i$, $\overline{\boldsymbol{f}}^i$ 之间的关系是 $\overline{\boldsymbol{f}}^i = q_j{}^i \boldsymbol{f}^j$，由

$$\langle \boldsymbol{f}^i, \boldsymbol{e}_j\rangle = \delta_j{}^i, \quad \langle \overline{\boldsymbol{f}}^i, \overline{\boldsymbol{e}}_j\rangle = \delta_j{}^i$$

得

$$\begin{aligned}\delta_j{}^i &= \langle \overline{\boldsymbol{f}}^i, \overline{\boldsymbol{e}}_j\rangle = \langle q_k{}^i \boldsymbol{f}^k, p_j{}^h \boldsymbol{e}_h\rangle = q_k{}^i p_j{}^h \langle \boldsymbol{f}^k, \boldsymbol{e}_h\rangle \\ &= q_k{}^i p_j{}^h \delta_h{}^k = q_k{}^i p_j{}^k\end{aligned}$$

即得下列

定理 4.2 设V的基底变换为 $\overline{\boldsymbol{e}}_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j$，$(p_i{}^j)$ 的逆矩阵为 $(q_j{}^i)$，则 V^* 里的对偶基底的变换是 $\overline{\boldsymbol{f}}^i = q_j{}^i \boldsymbol{f}^j$。

张量积（tensor product）有二向量空间 V, W，由此可作出如下向量空间 Z。

（1）对于V的任意元 $\boldsymbol{x}$ 与W的任意元 $\boldsymbol{y}$，则Z的元确定一个。记以 $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}$。

（2）$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}$ 关于 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 是双线性的。即

$$(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2)\otimes\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{y} + k_2\boldsymbol{x}_2\otimes\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{x}\otimes(k_1\boldsymbol{y}_1 + k_2\boldsymbol{y}_2) = k_1\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}_1 + k_2\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}_2$$

（3）Z由 $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}$ 的的全体生成。即Z由这样元的线性组合全体而

成。

此向量空间Z称为V与W的**张量积**，以$V\otimes W$记之。这样的空间实际能作出来如下所述。对于V，W的任意元 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，考虑它们的组$\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$，设以实数为系数，有限个 $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$ 的线性组合而成加群为$V\circ W$。于其中，设由 $(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)\circ\boldsymbol{y}-k_1\boldsymbol{x}_1\circ\boldsymbol{y}-k_2\boldsymbol{x}_2\circ\boldsymbol{y}$， $\boldsymbol{x}\circ(k_1\boldsymbol{y}_1+k_2\boldsymbol{y}_2)-k_1\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}_1-k_2\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}_2$ 生成的$V\circ W$的子加群为S，再设$V\circ W/S=V\otimes W$。

根据张量积的定义，当

$$\boldsymbol{x}=a^i\boldsymbol{x}_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$
$$\boldsymbol{y}=b^j\boldsymbol{y}_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

时，则

$$\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}=a^ib^j\boldsymbol{x}_i\otimes\boldsymbol{y}_j$$

若有三个向量空间U，V，W，因（$U\otimes V$）$\otimes W$与$U\otimes(V\otimes W)$同构，因此等同视之，记做$U\otimes V\otimes W$。而且，对于 $\boldsymbol{x}\in U$，$\boldsymbol{y}\in V$，$\boldsymbol{z}\in W$

$$(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})\otimes\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\otimes(\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{z},$$

至于三个以上的张量积也一样。

对于n维向量空间V，考虑张量积 $V\otimes V$，则其元称为二阶**反变张量**。在V里取基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，则此元可写做$T^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$。对于基底变换 $\boldsymbol{e}_i\to\overline{\boldsymbol{e}}_i=p_i{}^j\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{e}_i=q_i{}^j\overline{\boldsymbol{e}}_j$，故

从 $T^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=\overline{T}^{ij}\ \overline{\boldsymbol{e}}_i\otimes\overline{\boldsymbol{e}}_j$ 得 $\overline{T}^{ij}=q_k{}^iq_h{}^jT^{kh}$

同理，取V的对偶空间 V^* 两个作积 $V^*\otimes V^*$，其元称为 二阶**共变张量**。在 V^* 里取对偶基底 $\boldsymbol{f}^1$，$\boldsymbol{f}^2$，$\cdots$，$\boldsymbol{f}^n$，则共变张量可写做 $T_{ij}\boldsymbol{f}^i\otimes\boldsymbol{f}^j$，对于基底变换 $\boldsymbol{f}^i\to\overline{\boldsymbol{f}}^i=q_j{}^i\boldsymbol{f}^j$，因 $\boldsymbol{f}^i=p_j{}^i\overline{\boldsymbol{f}}^j$， 故分量的变换是

$$\overline{T}_{ij}=p_i{}^kp_j{}^hT_{kh}$$

再者，$V\otimes V^*$ 的元称为**混合张量**。使用V的基底 $\boldsymbol{e}_i$ 与 V^* 里的对偶基底 $\boldsymbol{f}^i$，则混合张量可写做 $T_j{}^i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{f}^j$。其分量的变换为

$$\overline{T}_j{}^i=p_j{}^kq_h{}^iT_k{}^h$$

一般，r 个V与 s 个 V^* 的张量积 $V\otimes V\otimes\cdots\otimes V\otimes V^*\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*$ 的元称为 r 阶反变，s 阶共变张量，或简称 **(r,s) 型张量**。设其元为$T^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes f^{j_1}\otimes f^{j_2}\otimes\cdots\otimes f^{j_s}$，则对于基底变换，张量分量的变换是

$$\overline{T}^{i_1i_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_s}=p^{h_1}_{j_1}\,p^{h_2}_{j_2}\cdots p^{h_s}_{j_s}\,q^{i_1}_{k_1}\,q^{i_2}_{k_2}\cdots q^{i_r}_{k_r}\,T^{k_1k_2\cdots k_r}_{h_1h_2\cdots h_s}$$

V的向量（反变向量）可看做（1，0）型，V^* 的向量（共变向量）可看做（0，1）型。

因为同型二张量属于相同向量空间，故其和仍为同型张量。乘以实数，张量的型一样。

其次（r_1，s_1）型张量与（r_2，s_2）型张量相乘得（r_1+r_2，s_1+s_2）型张量。例如

$$(S_j{}^ie_i\otimes f^j)\otimes(T_{lm}{}^ke_k\otimes f^l\otimes f^m)=S_j{}^iT_{lm}{}^ke_i\otimes f^j\otimes e_k\otimes f^l\otimes f^m$$

然因 $V\otimes V^*\otimes V\otimes V^*\otimes V^*$ 与 $V\otimes V\otimes V^*\otimes V^*\otimes V^*$ 做为张量是同型的，故上述乘积可看做（2，3）型张量。

张量的缩短（contraction）当$T=(T_{jk}{}^i)$ 是 （1，2） 型张量时，由 $S_k=T_{ik}{}^i$ 作 S_k，则 $S=(S_k)$ 是共变向量。这是因为通过以下讨论就可以理解。首先对于基底变换，T 的分量的变换是

$$\overline{T}_{jk}{}^i=q_l{}^ip_j{}^mp_k{}^nT_{mn}{}^l$$

令 $i=j$，关于 i 相加，由 $q_i{}^ip_i{}^m=\delta_l{}^m$可见，

$$\overline{S}_k=\overline{T}_{ik}{}^i=q_l{}^ip_i{}^mp_k{}^nT_{mn}{}^l=\delta_l{}^mp_k{}^nT_{mn}{}^l=p_k{}^nT_{ln}{}^l=p_k{}^nS_n$$

即

$$\overline{S}_k=p_k{}^nS_n$$

一般，对于（s，r）型张量$T=\left(T^{j_1\cdots j_k\cdots j_s}_{i_1\cdots i_h\cdots i_r}\right)$，考虑 $j_k=i_h$的各项，关于 $j_k=1，2，\cdots，n$ 相加之，以这些和数为分量得（$s-1$，$r-1$）型张量。这样作出共变，反变都降低一阶的张量称为张量的**缩短**。

讲一下最简单的情况，（1，1）型张量$T=(T_j{}^i)$ 的缩短是数量

（与基底的取法无关系的数）．

对称张量，反称张量 例如，对于（0，2）型张量 $T=(T_{ij})$，由 $S_{ij}=T_{ji}$ 定义 S_{ij}，则 S_{ij} 依然是（0，2）型张量。原因是：

$$\overline{S}_{ij}=\overline{T}_{ji}=p_j{}^k p_i{}^h T_{kh}=p_i{}^h p_j{}^k T_{kh}=p_i{}^h p_j{}^k T_{hk}$$

现在，当 $T=(T_{ij})$ 与方才作出的 $S=(S_{ij})$ 相等时，则称(0，2）阶张量T是二阶对称共变张量。这时 $T_{ji}=T_{ij}$,根据以上讨论知，此性质不随基底的变换而改变。

同理，当 $S=(-1)T$，即 $T_{ji}=-T_{ij}$ 时，称T为二阶**反称共变张量**。特别是当 $u=(u_i)$，$v=(v_i)$ 为共变向量时，$(u_iv_j-u_jv_i)$ 是二阶反称共变张量，称此张量为**双向量**（bivector)。

同理，对于反变张量也可考虑对称张量，反称张量，但混合张量却不能这样考虑。

外积 在 n 维向量空间V里，可以考虑外积$\wedge$如下。对于V的任意向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，设

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}=0$$

此外，假设可以作普通代数演算（这样演算的根据以后再谈）．

这时，对于V的基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$，

$$\sum_{i<j}a_{ij}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j$$

称为**二次外形式**（exterior form）（此处不省略记号 Σ）．此式又可写做

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\quad(a_{ij}=-a_{ji})$$

三次外形式是

$$\sum_{i<j<k}a_{ijk}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k,$$

如用反称张量 (a_{ijk}) 也可写做

$$\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}a_{ijk}\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k$$

关于外形式的乘法，一般假设

$$(\boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_r)\wedge(\boldsymbol{e}_{r+1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_s)=\boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_r\wedge\boldsymbol{e}_{r+1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_s$$

此外，允许和普通式子作相同演算。

例如，

$$\left(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i\right)\wedge\left(\sum_j b_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j}a_ib_j\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j$$

以及

$$\left(\sum_i a_{1i}\boldsymbol{e}_i\right)\wedge\left(\sum_i a_{2i}\boldsymbol{e}_i\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_i a_{ni}\boldsymbol{e}_i\right)=\det(a_{ij})\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n$$

设 Ω_1 为 r 次外形式，Ω_2 为 s 次外形式，则

$$\Omega_1\wedge\Omega_2=(-1)^{rs}\Omega_2\wedge\Omega_1$$

以下阐述这样计算的根据。

设有二阶张量

$$T=\sum_{i,j}T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

由此作

$$\alpha(T)=\sum_{i,j}\frac{1}{2}(T_{ij}-T_{ji})\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

从对称张量一段的叙述立即可见这种操作与基底 $\boldsymbol{e}_i$ 的取法无关．此 $\alpha(T)$ 是反称张量。求此 α 称为张量的**反称化**。

从二向量 $\boldsymbol{a}=\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i$，　$\boldsymbol{b}=\sum_i b_i\boldsymbol{e}_i$ 的张量积得

$$\alpha(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})=\alpha\left(\sum_{i,j}a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j}\frac{1}{2}(a_ib_j-a_jb_i)\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\ .$$

对于三阶张量，在反称化

$$\alpha\left(\sum_{i,j,k}T_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\right)=\sum_{i,j,k}S_{ijk}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k$$

里，S_{ijk} 是 T_{ijk} 的三指标 i，j，k 作所有的排列，根据它们的偶奇在 T_{ijk} 的前边添上 $+1$，-1，相加并除以 $3!=6$。具体地写就是

$$S_{ijk}=\frac{1}{6}(T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij}-T_{jik}-T_{ikj}-T_{kji})$$

这是反称张量的分量。

四阶以上张量也同样考虑。

根据这种反称化，可将全体张量在保持和、常数倍、积的关系不变之下变到全体反称张量之中（同态）。这时反称张量变为它自己。

此对应关于反称化的算法也是合理的。即对于二张量 T_1，T_2，可证

当 $\alpha(T_1)=\alpha(\bar{T}_1)$，$\alpha(T_2)=\alpha(\bar{T}_2)$ 时，

$$\alpha(T_1\otimes T_2)=\alpha(\bar{T}_1\otimes\bar{T}_2).$$

由此，在 $\alpha(T_1)$ 中由

$$\alpha(T_1)\wedge\alpha(T_2)=\alpha(T_1\otimes T_2)$$

定义积$\wedge$。特别是

$$\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j=\alpha(\boldsymbol{e}_i)\wedge\alpha(\boldsymbol{e}_j)=\alpha(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i)$$

由此式可导出

$$\left(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i\right)\wedge\left(\sum_i b_i\boldsymbol{e}_i\right)=\sum_{i,j}a_ib_j\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(a_ib_j-a_jb_i)\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j$$

这是根据

$$\alpha\left(\left(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\left(\sum_i b_i\boldsymbol{e}_i\right)\right)=\alpha\left(\sum_{i,j}a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j}a_ib_j\alpha(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$$

得到的。

§2 欧氏向量空间

在向量空间V里，对于任意二向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 决定一实数，以 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

记之，假设下列性质成立。此 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**内积**。

（Ⅰ） $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$，　$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

（Ⅱ） $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\geqslant 0$，只有当 $\boldsymbol{a}=0$ 时等号成立。

定义内积的向量空间称为**欧氏向量空间**（Euclidean vector space）。在此空间里，可由

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

定义向量 $\boldsymbol{a}$ 之长或模 $|\boldsymbol{a}|$。长为 1 的向量称为**单位向量**。

再从二向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，作 t 的二次式

$$(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})t^2+2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})t+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$$

因为它不是负的，故考虑判别式得

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2\leqslant(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \text{ 故 } |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$$

从而，对于非 0 二向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 可由

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

定义它们的夹角 θ，当 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，这时称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直。

如果用向量的分量表示内积，有下列

定理 4.3 在 n 维欧氏向量空间里对于基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$，令

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=g_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

则向量 $\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b}=b^i\boldsymbol{e}_i$ 的内积变成

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=g_{ij}a^ib^j \tag{2.1}$$

证明 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(a^i\boldsymbol{e}_i, b^j\boldsymbol{e}_j)=a^ib^j(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=g_{ij}a^ib^j$　（证毕）

特别当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=g_{ij}a^ia^j \tag{2.2}$$

由（Ⅱ）知，只要 $\boldsymbol{a}\neq 0$，它是正的。此式关于 a^1，a^2，…，a^n 是齐二次式（二次形），因为只要 $(a^1, a^2, \cdots, a^n)\neq(0, 0, \cdots, 0)$ 它是正，故为正定二次形。而且 $g=(g_{ij})$ 是共变张量。

反之，如有二阶对称共变张量 g，对于它的分量 (g_{ij}) 与任意反变向量 $\boldsymbol{a}=(a^i)$，$g_{ij}a^ia^j$ 是正定的；对于 $\boldsymbol{a}=(a^i)$，$\boldsymbol{b}=(b^i)$，内积由（2.1）给定时；则此向量空间为欧氏向量空间。

$g=(g_{ij})$ 称为欧氏向量空间的**基本张量**。如果取特定的基底，则此基本张量可简化如下。

定理 4.4 在 n 维欧氏向量空间里可取满足

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{当 } i=j \text{ 时})\\ 0 & (\text{当 } i\neq j \text{ 时})\end{cases}$$

的基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$。

略证 因为是 n 维，故存在线性无关的 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$…，$\boldsymbol{a}_n$。首先，由 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}_1/|\boldsymbol{a}_1|$ 决定 $\boldsymbol{e}_1$，于是 $(\boldsymbol{e}_1.\ \boldsymbol{e}_1)=1$。其次，由

$$\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2-(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$$

作 $\boldsymbol{b}_2$。则 $\boldsymbol{b}_2\neq 0$，$(\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{e}_1)=0$。于是由 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{b}_2/|\boldsymbol{b}_2|$ 决定 $\boldsymbol{e}_2$ 得 $(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2)=1$。$(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1)=0$。

再由

$$\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3-(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$$

作 $\boldsymbol{b}_3$，则

$$\boldsymbol{b}_3\neq 0,\quad (\boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{e}_1)=0,\quad (\boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{e}_2)=0$$

于是令 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{b}_3/|\boldsymbol{b}_3|$ 得

$$(\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_3)=1,\quad (\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_1)=0,\quad (\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)=0$$

继续这样作下去即可。

这种 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 称为**标准正交基**或简称**正交标架**。取这种基底时，向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 称为**正交分量**。象这样，正交分量的指标写在下边是常有的事。这时，易知

定理 4.5 设向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的正交分量分别为 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，则

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

标准正交基的选法不只一种。今用正交矩阵 $(p_i{}^j)$，从标准正交基

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 作出

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{2.3}$$

易见$\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, …, $\overline{e}_n$ 也是标准正交基。反之，从标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 到标准正交基 $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, …, $\overline{e}_n$ 的变换用矩阵 $(p_i{}^j)$表示如（2.3）时，则此矩阵为正交矩阵。

欧氏向量空间的张量 在此向量空间里，考虑标准正交基的变换 $\boldsymbol{e}_i \to \overline{\boldsymbol{e}}_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j$，对此变换，对偶空间的对偶基底的变换是

$$\overline{\boldsymbol{f}}^i = q_j{}^i \boldsymbol{f}^j, \ (q_j{}^i) \text{ 是 } (p_i{}^j) \text{ 的逆矩阵}$$

因为 $(p_i{}^j)$ 是正交矩阵，故得

$$\overline{\boldsymbol{f}}^i = p_j{}^i \boldsymbol{f}^j$$

因此，$\boldsymbol{e}_i \to \overline{\boldsymbol{e}}_i$ 与 $\boldsymbol{f}^i \to \overline{\boldsymbol{f}}^i$ 的变换式完全一样。故得

定理 4.6 欧氏向量空间的标准正交基的基底变换规律与对偶空间的对偶基底的变换相同。故在标准正交基下，共变向量与反变向量没有区别。

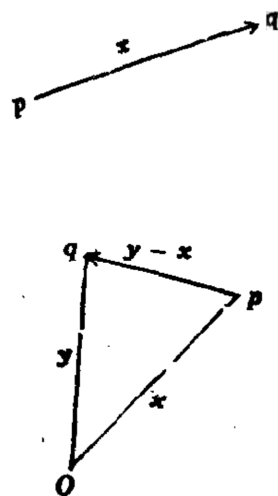
在欧氏向量空间里，设基本张量的分量为 (g_{ij})，从反变向量 (v^i) 通过 $u_i = g_{ij} v^j$ 可作出共变向量 (u_i)。有时将这两个向量看做一个，(v^i) 称为反变分量，(u_i) 称为共变分量。

§3 仿射空间与欧氏空间

仿射空间 （affine space）设V为 n 维向量空间，以此空间为基础可决定仿射空间A如下。

（1）对于A的任意二点 p，q（考虑顺序），对应一个向量 $\boldsymbol{x}$，称之为从点 p 到 q 的向量。

（2）对于A的三点 p，q，r，对 p，q 有V的 $\boldsymbol{x}$，对 q，r 有V的 $\boldsymbol{y}$ 与之对应，则对 p，r 有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 与之对应。



第 4.1 图

在A中决定一点O，由此。对于任意点p决定一个向量。此向量称为点 p 的**位置向量**。

位置向量为 $\boldsymbol{x}$ 的点，简称点 $\boldsymbol{x}$。这时，下列基本定理成立。

定理 4.7 从点 $\boldsymbol{x}$ 到点 $\boldsymbol{y}$ 的向量是 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$。

用这些性质为基础可在仿射空间A中建设几何学。首先取k个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$, 以

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+t^i\boldsymbol{a}_i \quad (t^1,\ t^2,\ \cdots,\ t^k \text{ 是任意实数})$$

为位置向量的点全体称为通过点 $\boldsymbol{c}$ 的 $\boldsymbol{k}$ **维平面**。特别当 $k=1$ 时称为直线，$k=n-1$ 时称为**超平面**。

在仿射空间里规定原点O与基本向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 后，则任意位置向量可写做

$$\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i \tag{3.1}$$

此 $(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的坐标(详细点说是笛卡儿坐标)。这时，仿射空间的位移是根据

$$(x^i)'=a^i+p_j{}^ix^j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\ \det(p_j{}^i)\neq 0 \tag{3.2}$$

将点 $(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 变为点 $((x^1)',\ (x^2)',\ \cdots,\ (x^n)')$。

一般地说，如有以点 $\boldsymbol{a}$ 为原点的标架$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$以及以$\overline{\boldsymbol{a}}$为原点的标架 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$, $\overline{\boldsymbol{e}}_2$, …, $\overline{\boldsymbol{e}}_n$, 则位置向量为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+x^i\boldsymbol{e}_i \tag{3.3}$$

的点 $\boldsymbol{x}$ 变为

$$\boldsymbol{x}'=\overline{\boldsymbol{a}}+x^i\overline{\boldsymbol{e}}_i \tag{3.4}$$

的变换是仿射变换的意思是：令

$$\boldsymbol{x}'=(x^i)'\boldsymbol{e}_i,\qquad \overline{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}+a^i\boldsymbol{e}_i,\qquad \overline{\boldsymbol{e}}_i=p_i{}^j\boldsymbol{e}_j \tag{3.5}$$

则由 (3.1), (3.4), (3.5) 可得 (3.2)。

在仿射空间里，在位移 (3.2) 下，二图形之一变为另一个时，则称此二图形**合同**。

欧氏空间 (Euclidean space) 在仿射空间里基本的向量空间V是欧氏向量空间时，称此仿射空间为**欧氏空间**。在这里定义

$$\text{两点 } \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \text{ 的距离}=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$$

在欧氏空间里可用原点 O 以及作成标准正交基的基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 表示任意向量 $\boldsymbol{x}$ 为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$$

时，则此 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的直角坐标。

欧氏空间里的位移是由

$$x'_i=a_i+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j \quad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (p_{ij})\text{是正交矩阵}$$

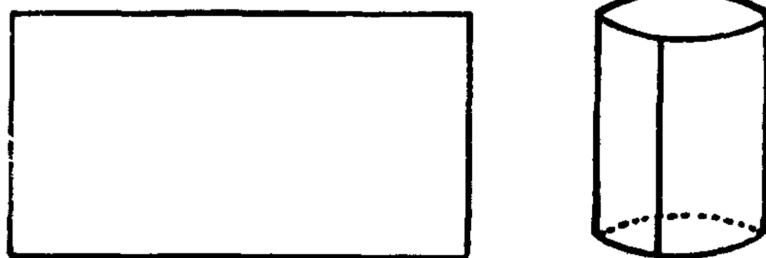
将直角坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的点变为直角坐标 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ 的点。

§4 微 分 流 形

三维空间里的曲面、圆柱面、球面与 $p.14$ 讨论的平面域并不同胚(一对一，双连续对应).但，它们是由与域同胚的几部分相贴而成。

例 1 球 面

它是由两个半球面相贴而成，各半球面与圆的内部同胚。



第 4.2 图

例 2 圆柱面

考虑平行二直线间那部分，把二平行线的公垂线之足贴在一起得圆柱面。

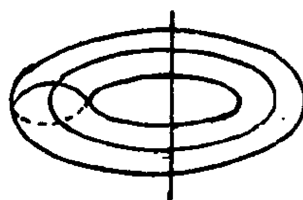
例 3 圆环面 (torus)

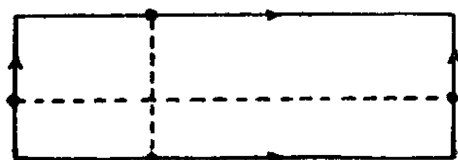
在平面上考虑离直线 l 距离 b 远的某点，以及以此点为圆心半径

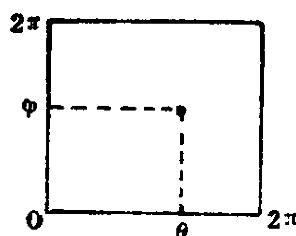
$a(<b)$ 的圆，绕 l 将此圆回转一周可得圆环面。此面上点的位置可由决定圆上点的位置的圆心角 θ，以及绕 l 的回转角 φ 而定。而且

$$0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi.$$

故将 (θ,φ) 看做直角坐标时，圆环面与正方形 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ 一一对应。这时，如果 $\theta=2\pi$，$\varphi=2\pi$ 也在考虑之中，则将点 $(0,\varphi)$ 与点 $(2\pi,\varphi)$；点 $(\theta,0)$ 与 $(\theta,2\pi)$ 看做相同点即可。总之，只从曲面的连结状态看，可以说圆环面是将正方形的对边贴在一起而得之面。当然，这中间要把正方形看做橡皮膜是可伸缩的。



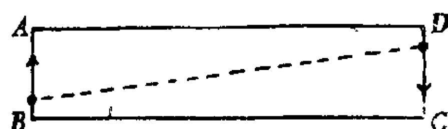


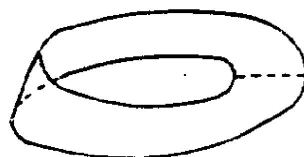


第 4.3 图

例 4 麦比乌斯带（Möbius band）

在矩形 $ABCD$ 里，将 A 和 C 重迭，B 和 D 重迭，将边 AB 和 CD 贴在一起便得此面。矩形 $ABCD$ 看做纸作的，其一侧面染上色，如果按上述方法贴起来，则有色的面和无色的面连接在一起。故此面不能分开表与里。

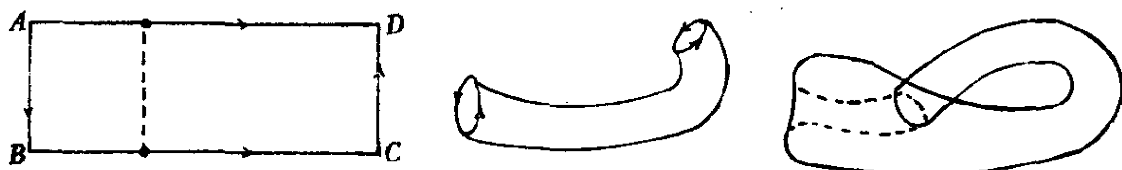




第 4.4 图

例 5 克莱茵瓶（Klein bottle）

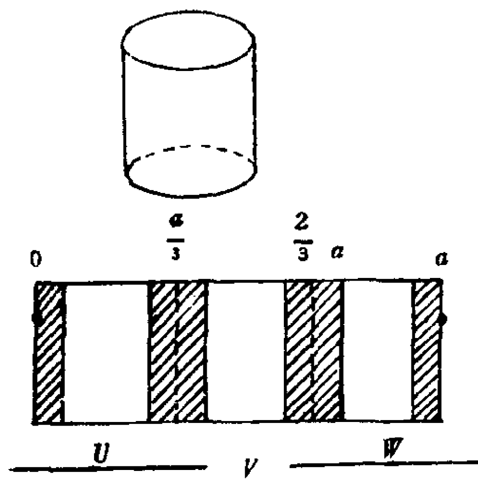
在矩形 $ABCD$ 里，将 A 与 B，C 与 D 重迭。将 AD，BC 贴在一起，同时将 A 与 C，B 与 D 重迭，将 AB，CD 贴在一起而得的面便是。要想在三维欧氏空间里作出这样的面，面自己必相交，与一开始的点集不是一对一的。但不是想作出这样的面让你放在眼前看，而只是从面的连系上来想。这个面也不能区分表与里（第 4.5 图）。



第 4.5 图

其次，将这些面用与平面域同胚的几部分U，V，…复盖之，而且在连接处以某种宽度重迭（留出贴浆糊处）。这时，在各U，V…的点可以对应以平面上点的坐标，称之为**局部坐标**。

例 1 正圆柱面



第 4.6 图

将截痕的周长为a的正圆柱面沿母线剪开，则可展开在平面上直角坐标满足 $0\leqslant x_1\leqslant a$ 之处。这时 $(0, x_2)$，(a, x_2) 二点其实来自一点。把它扩充到 $-\frac{a}{12}<x_1<a+\frac{a}{12}$，用三部分

$$U: -\frac{a}{12}<x_1<\frac{a}{3}+\frac{a}{12},$$

$$V: \frac{a}{3}-\frac{a}{12}<x_1<\frac{2a}{3}+\frac{a}{12},\quad W: \frac{2a}{3}-\frac{a}{12}<x_1<a+\frac{a}{12}$$

复盖之，设它们之中的局部坐标 (u_1, u_2)，(v_1, v_2)，(w_1, w_2) 分别为

$$\begin{cases}u_1=x_1\\u_2=x_2\end{cases},\quad \begin{cases}v_1=x_1\\v_2=x_2\end{cases},\quad \begin{cases}w_1=x_1\\w_2=x_2\end{cases} \tag{4.1}$$

则在U，V，W的重迭部分同一点的两种坐标间的关系是

$$在U\cap V里\ \begin{cases}v_1=u_1\\v_2=u_2\end{cases},\quad 在V\cap W里\ \begin{cases}w_1=v_1\\w_2=v_2\end{cases} \tag{4.2}$$

$$在W\cap U里\ \begin{cases}u_1=w_1-a\\u_2=w_2\end{cases}$$

例 2 麦比乌斯带

此面是：关于直角坐标 (x_1, x_2)，由 $0 \leqslant x_1 \leqslant a$，$-\frac{b}{2} < x_2 < \frac{b}{2}$ 而定的矩形；$x_1 = 0$ 的边与 $x_1 = a$ 的边反向相贴而成。故扩充到 $-\frac{a}{12} < x_1 < a + \frac{a}{12}$ 的范围。如例 1 的圆柱面以 U，V，W 三部分复盖之 $\left(-\frac{b}{2} < x_2 < \frac{b}{2}\right)$。它们之中的坐标按（4.1）规定，则局部坐标的变换在 $U \cap V$，$V \cap W$ 里与（4.2）相同，

$$\text{在} W \cap U \text{里} \begin{cases} u_1 = w_1 - a \\ u_2 = -w_2 \end{cases}$$

例 3 球面

在三维欧氏空间的球面

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

上考虑如下。在此球面上，设

$x_3 > 0$ 这部分为 U_1，$x_3 < 0$ 为 U_2，

$x_1 > 0$ 为 U_3，　　$x_1 < 0$ 为 U_4，

$x_2 > 0$ 为 U_5，　　$x_2 < 0$ 为 U_6，

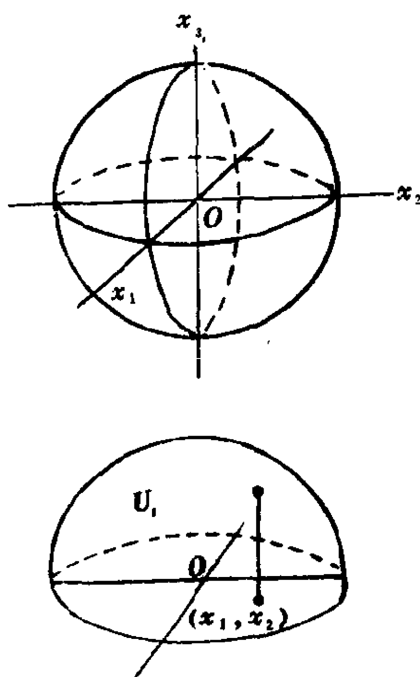
在此各部分上取局部坐标为

在 U_1，U_2 上，是 (x_1, x_2)；

在 U_3，U_4 上，是 (x_2, x_3)；

在 U_5，U_6 上，是 (x_3, x_1)。

用这六个 U_i，将整个球面复盖。而且，例如在 $U_1 \cap U_3$，即 $x_3 > 0$，$x_1 > 0$ 之处，



第 4.7 图

$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, \quad x_2 = x_2$$

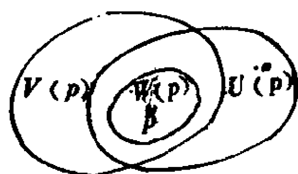
是同一点在 U_1 里的局部坐标 (x_1, x_2) 与在 U_3 里的局部坐标 (x_2, x_3) 之间的关系。

以下考虑用引进坐标的几个邻域复盖的空间并且于其上考虑黎曼几何。这样的空间叫做微分流形，它的正确定义如下所述。为了作准

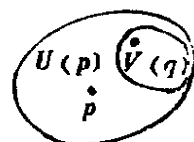
备，先说明拓扑空间（topological space）。

拓扑空间 有集M，一般地称其元为**点**.M的各点不是七零八落，而是在某种意义下加以联系，这是M的**拓扑**。把二点间的距离看做拓扑，在这个基础上考虑也行，更普遍的方法是，以包含各点的M的某种子集（邻域）为基础考虑。以下叙述之。

对于集M的各点 p，考虑包含 p 的M的子集 $U(p)$，称之为 p 的**邻域**。当此邻域的集 N具有下列性质时，M称为**拓扑空间**（详细点说是豪斯道夫拓扑空间）。



（1）对于属于N的任意两个$U(p)$，$V(p)$，则存在包含于 $U(p)\cap V(p)$ 内的 N 的元$W(p)$。



（2）对于属于 $U(p)$的任意点q，有$V(q)\subset U(p)$ 的 $V(q)$。



第 4.8 图

（3）对于不同两点 p，q,存在邻域$U(p)$，$V(q)$ 使得 $U(p)\cap V(q)$ 是空集。

从这些条件可导出下列各概念。

开集 对于属于集A的任意点，如果存在它的邻域包含于A中，则称A为开集。

闭集 所谓集A是闭集就是从M去掉A剩下的集是开集。

紧致集 当集A由无穷多个开集复盖时，如果能从这些开集中适当选出有限个，只用这有限个就可将A复盖上，则称A为紧致集。

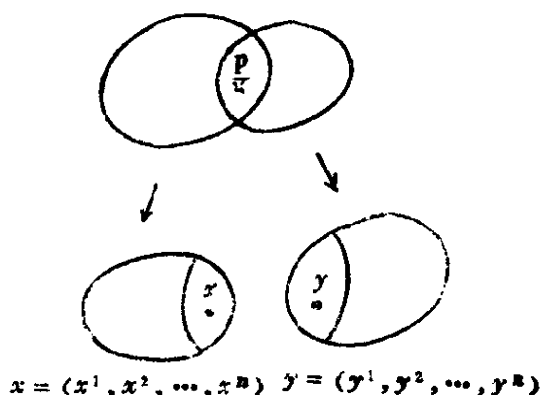
连通性 如果集A不能分为无公共点的开集时，则称此集是连通的。

微分流形 （differentiable manifold）n 维微分流形M可定义如下。设拓扑空间M由一些开集的集 $\{U_i\}$ 复盖，各 U_i 与 n 维向量空间的开集 D_i 同胚，用 φ_i: $D_i\to U_i$；表示这个同胚。这时，如果 U_i 的点 p 与 D_i 的点 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 相对应，则称 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 为点 p 在坐标邻域 U_i 内的**局部坐标**。对于任意的 U_i，

U_j，以及 $U_i \cap U_j$ 内任意点 p，U_i 内的局部坐标 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 与 U_j 内的局部坐标 $(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ 之间存在一一对应；不论把 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 看做 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的函数，还是把 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 看做 $y^1, y^2, \cdots, y^n$ 的函数假设都是 C^k 级的。这时，拓扑空间 M 称为 **C^k 级 n 维微分流形**。

这时，和 $p.13$ 一样可以证明

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^n)} \neq 0$$



第 4.9 图

如果 M 由坐标邻域复盖，在两个坐标邻域的公共点总是

$$\frac{\partial(y^1, y^2, \cdots, y^n)}{\partial(x^1, x^2, \cdots, x^n)} > 0$$

时，则称此微分流形是 **可 定 向** 的 (oriented)。能用这样坐标邻域复盖的拓扑空间也称为可定向的。

例如，对于二维微分流形 $p.107$ 例 1 的正圆柱面来说，在 $U \cap V$，$V \cap W$，$W \cap U$ 上分别是

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(u_1, u_2)} = 1, \qquad \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(v_1, v_2)} = 1, \qquad \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(w_1, w_2)} = 1$$

故根据此坐标邻域可以定向。

相反，在 $p.108$ 例 2 的麦比乌斯带上，在 $U \cap V$，$V \cap W$ 上与前例一样，但在 $W \cap U$ 上

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(w_1, w_2)} = -1$$

故麦比乌斯带不可定向。这给无表里这个性质以理论根据。

§5 切 空 间

在 n 维微分流形里取一坐标邻域 U，设于 U 中的坐标系为

x^1, $x^2, \cdots, x^n$。今设 $x^i = x^i(t)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 为通过一点 p 的曲线，则过此点此曲线的切向量的分量由

$$\left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \cdots, \frac{dx^n}{dt}\right)$$

定义是极其自然的，然如通过坐标变换

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \cdots, y^n) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

使用同一点的另一坐标系 y^1, y^2, $\cdots$, y^n，则

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{dy^j}{dt} \tag{5.1}$$

现在，在点 p 考虑伴随的 n 维切空间 T_p。于其中，设标架 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是对应于坐标系(x^i)选的，而标架 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$, $\overline{\boldsymbol{e}}_2$, $\cdots$, $\overline{\boldsymbol{e}}_n$是对应于坐标系 (y^i) 选的。如果是

$$\frac{dx^i}{dt} \boldsymbol{e}_i = \frac{dy^i}{dt} \overline{\boldsymbol{e}}_i$$

就太好了。参照 (5.1)知此式变为

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^i} \boldsymbol{e}_j = \overline{\boldsymbol{e}}_i \quad \text{即} \quad \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \overline{\boldsymbol{e}}_j \tag{5.2}$$

然而对于任意函数 f，

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^j} \quad \text{即} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.3}$$

因此定义切空间 (tangent space) 如下。

切空间与对偶切空间 在 n 维微分流形M里取一坐标邻域U，于U中设坐标系为 x^1, $\cdots$, x^n。 在U的一点 p考虑一阶微分算子

$$X_p = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \quad (a^i \text{ 是实数}) \tag{5.4}$$

在U里对于函数 $f = f(x^1, \cdots, x^n)$，此算子是

$$X_p f = a^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \quad \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \text{ 是 } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ 在 } p \text{ 的值}\right).$$

在这样 X_p 的全体中，如果定义和以及乘以实数为

$$a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p + b^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = (a^i + b^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p ,$$

$$k\left(a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right) = ka^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

时，则上述 X_p 的全体作成向量空间。它是 n 维的。原因是，任意 X_p 可以写成（5.4）的形状，而且如设 $X_p = 0$ 则得 $X_p x^j = a^j = 0$ $(j=1, \cdots, n)$。

这种 X_p 全体作成的向量空间称为在U的 p 处的**切空间**，记以 T_p。又 $\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ 称为关于坐标系 $x^1, \cdots, x^n$ 的**自然标架**（natural frame)。

今有复盖点 p 的其他坐标邻域 U，设其中的坐标系为 $y^1, \cdots, y^n$，令关于此种坐标系的自然标架为$\overline{\boldsymbol{e}}_i = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p$，从（5.3）得

$$\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p \overline{\boldsymbol{e}}_j$$

这是在坐标变换 $(x^1, \cdots, x^n) \to (y^1, \cdots, y^n)$ 下，自然标架的变换。

其次考虑切空间 T_p 的对偶向量空间 T_p^*。T_p^* 的元 φ 是在 T_p 的元 X_p 上取实数值的线性函数，其值是 $\langle \varphi, X_p \rangle$.今对于自然标架 $\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$，设在 T_p 内的对偶基底为 $\boldsymbol{f}^i$，对于另一个自然标架 $\overline{\boldsymbol{e}}_i$，设为 $\overline{\boldsymbol{f}}^i$，则

$$\overline{\boldsymbol{f}}^i = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_p \boldsymbol{f}^j$$

今对于函数F，考虑 T_p^* 的元 $\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p \boldsymbol{f}^i$，则得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p \boldsymbol{f}^i=\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\ \frac{\partial F}{\partial y^j}\right)_p \boldsymbol{f}^i=\left(\frac{\partial F}{\partial y^j}\right)_p\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p \boldsymbol{f}^i=\left(\frac{\partial F}{\partial y^j}\right)_p \bar{\boldsymbol{f}}^j$$

故与坐标系的选法无关。称此 $T_p{}^*$ 的元为**函数** F 在点 p 的**微分**，记以 $(dF)_p$。

特别当 $F=x^i$ 时，$\dfrac{\partial F}{\partial x^j}=\delta_j{}^i$，故 $(dx^i)_p=\boldsymbol{f}^i$。因此可写做

$$(dF)_p=\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p(dx^i)_p. \tag{5.5}$$

由此可导出下列各性质。

$$\begin{aligned}&(d(F+G))_p=(dF)_p+(dG)_p,\\&(d(cF))_p=c(dF)_p \quad (c\ 为常数)\\&(d(FG))_p=(dF)_pG_p+F_pdG_p\end{aligned} \tag{5.6}$$

又因 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ 与 $(dx^i)_p$ 是对偶基底，故

$$\left\langle (dx_i)_p,\ \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \right\rangle=\delta_j{}^i$$

因此得

$$\left\langle a_i(dx^i)_p,\ b^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \right\rangle=a_ib^i$$

特别是

$$\left\langle (dF)_p,\ b^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right\rangle=b^i\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_p$$

向量场 (vector field) 在坐标邻域U的各点 p 的切空间，关于自然标架考虑分量为 $a^i=a^i(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$ 的反变向量，称之为**反变向量场**，记做

$$X=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{5.7}$$

当 $a^i(i=1,\ \cdots,\ n)$ 为 C^k 级函数时，称此向量场是 C^k 级的。**特别**

是从自然标架的基底决定的向量场为 $X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1, \cdots, n)$。自然，二向量场 $X=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$， $Y=b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的和，X与函数 $k=k(x^1, \cdots, x^n)$ 相乘的定义是

$$X+Y=(a^i+b^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad kX=(ka)^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

这样，向量场在各点作成向量空间。

如果某域D由几个坐标邻域复盖，在各坐标邻域中给定反变向量场，在二域的公共点向量场相同时，则称在此域D上给定向量场。

在坐标邻域U中在各点p的对偶切空间里关于自然标架给定分量为 $a_i=a_i(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的共变向量时，称之为**共变向量场**，记

$$\omega=a_idx^i. \tag{5.8}$$

也称为**一次微分形式**。又有函数F，如果 $a_i=\frac{\partial F}{\partial x^i}$则由（5.5）知，

令
$$dF=\frac{\partial F}{\partial x^i}dx^i$$

是自然的。这时，关于函数F，G，从（5.6）得

$$d(F+G)=dF+dG, \quad d(cF)=cdF \quad (c \text{ 是常数}),$$
$$d(FG)=dF\cdot G+FdG.$$

一次微分形式全体也作成向量空间。又能在几个坐标邻域复盖的域上考虑一次微分形式。

推广这种想法，则可考虑张量场。例如二阶张量场局部地可由 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的函数 a^{ij}，a_{ij}，$a_j{}^i$ 定义如下：

$$a^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad a_{ij}dx^i\otimes dx^j, \quad a_j{}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j.$$

与向量场一样可以推广到域全体上去。除此之外，

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=\delta_j{}^i, \quad \langle a_idx^i, b^j\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=a_ib^i,$$

$$\langle dF, b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = b^j \frac{\partial F}{\partial x^j}.$$

外微分形式 在点 p 的对偶切空间 $T_p{}^*$ 上考虑外积．关于自然标架讨论之，如果用反称张量 $(a_{i_1 i_2 \cdots i_k})$，则 k 次外形式可写成

$$\frac{1}{k!} a_{i_1 i_2 \cdots i_k}(dx^{i_1})_p \wedge (dx^{i_2})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_p \tag{5.9}$$

至于反称张量场是 $a_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 为 x^1，x^2，…，x^n 的函数，这时，在各点考虑的（5.9）全体

$$\omega = \frac{1}{k!} a_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{5.10}$$

是局部地在坐标邻域里定义的 k 次**外微分形式**(也简称微分形式)。又当域 D 由几个坐标邻域复盖，在各邻域里（5.10）有定义，在二邻域的公共部分它们是一致的，这时在 D 全体上可定义外微分形式。

k 次外微分形式在各点作成向量空间．再按自然方法考虑 k 次外微分形式与 l 次外微分形式的外积，则得 $k+l$ 次外微分形式。

外微分形式 $\omega = a_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ （5.11）

的**外微分** $d\omega$ 的定义是

$$d\omega = da_{i_1 i_2 \cdots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{5.12}$$

关于外微分下列性质成立。

（1）当 ω，ω' 是同次外微分形式时，则

$$d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$$

（2）若 ω 为 k 次，则

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega'$$

（3）当 f 是函数时，则

$$d(f\omega) = f d\omega + df \wedge \omega$$

（4）当 f 是函数，$\omega = df$ 时，则 $d\omega = 0$

证明 （1）显然。在（2）里令

$$\omega = a_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

$$\omega' = b_{j_1 j_2 \cdots j_l} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

则

$$\omega \wedge \omega' = a_{i_1 i_2 \cdots i_k} b_{j_1 j_2 \cdots j_l} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

根据定义求 $d(\omega \wedge \omega')$，注意

$$d(a_{i_1 i_2 \cdots i_k} b_{j_1 j_2 \cdots j_l}) = da_{i_1 i_2 \cdots i_k} b_{j_1 j_2 \cdots j_l} + a_{i_1 i_2 \cdots i_k} db_{j_1 j_2 \cdots j_l}$$

以及

$$db_{j_1 j_2 \cdots j_l} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$
$$= (-1)^k dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge (db_{j_1 j_2 \cdots j_l} \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l})$$

则

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega'$$

（3）模仿（2）易证.

（4）因 $\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$，则

$$d\omega = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

然因

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}, \qquad dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j$$

故
$$d\omega = 0$$

从性质（1），（2），（3），（4）可见，$d\omega$ 的定义与坐标 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的选法无关，证明如下。

设将

$$x^i = f^i(y^1, y^2, \cdots, y^n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

代入（5.11）而得之式为

$$\omega = b_{i_1 i_2 \cdots i_k} dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \qquad (5.13)$$

于式中将 y^{i_1}，y^{i_2}，$\cdots$，y^{i_k} 看做 x^1，x^2，$\cdots$，x^n 的函数并外微分之，则由（3）得

$$d\omega = db_{i_1 i_2 \cdots i_k} \wedge (dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$$
$$+ b_{i_1 i_2 \cdots i_k} d(dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$$

由（2），（3）得

$$d(dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$$
$$= d(dy^{i_1}) \wedge (dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) - dy^{i} \wedge d(dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$$
$$= -dy^{i_1} \wedge d(dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})$$

反复作下去可见为0，得

$$d\omega = db_{i_1 i_2 \cdots i_k} \wedge dy^{i_1} \wedge dy^{i_2} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$$

在（5.13）里将 y^1，y^2，…，y^n 看做坐标，根据定义求 $d\omega$ 而得之式与上式相同。（证毕）

§6 完全可积微分方程

r 个变数 x_1，x_2，…，x_r 的一次微分形式有 n 个，设它们是

$$\omega_i = \sum_{p=1}^{r} a_{ip}(x) dx_p \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (6.1)$$

又设它们线性无关。当然 $r \geqslant n$。这时，如果方程组

$$\omega_i = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (6.2)$$

有

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_r) = c_i \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (6.3)$$

$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是某域的任意点

而且 n 行 r 列矩阵 $(\partial F_i/\partial x_p)$ 的秩为 n （6.4）

的解时，则称此微分方程**完全可积**（completely integrable）。这里所说的解是在条件（6.3）下（6.2）恒成立。又完全可积这个性质与变数的取法无关。

这个条件又可叙述如下。

定理 4.8 （6.2）完全可积的充要条件是经过适当的变换

$$x_p = f_p(y_1, y_2, \cdots, y_r) \quad (p=1, 2, \cdots, n),$$

ω_i 变为下列形状。

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_r)dy_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad (6.5)$$

证明 充分性显然。必要性通过以下讨论可见。因为 $(\partial F_i/\partial x_p)$ 的秩为 n，故如有需要，适当更换变数 x_1，x_2，…，x_n 的号码可设

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\neq 0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

今对于解的 $F_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r)$，取

$$y_i=F_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

为变数的一部分，以后的变数取做 x_{n+1}，…，x_r；以 y_1，y_2，…，y_n，x_{n+1}，…，x_r 为全体变数时，则得

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_r)dy_j+\sum_{\alpha=n+1}^{r} b_{i\alpha}(y_1,y_2,\cdots,y_r)dy_\alpha$$

此式当 $y_j=c_j$（常数，$j=1$，2，…，n）时为 0，故

$$\sum_{\alpha=n+1}^{r} b_{i\alpha}(c_1,\ \cdots,\ c_n,\ y_{n+1},\ \cdots,\ y_r)dy_\alpha=0$$

因 c_j 任意，故得 $b_{i\alpha}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_r)=0$ （证毕）。

定理 4.9 （Frobenius 定理）当

$$\omega_i=\sum_{p=1}^{r} a_{ip}(x_1,\ \cdots,\ x_r)dx_p \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad (6.6)$$

线性无关时，$\omega_i=0$ 完全可积的充要条件是

$$d\omega_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\wedge\pi_{ji} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \quad (6.7)$$

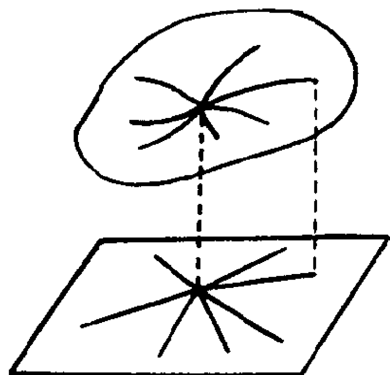
证明 必要性。从（6.5）通过以下讨论可见。由（6.5）知

$$d\omega_i=\sum_j db_{ij}\wedge dy_j$$

再由（6.5）知$dy_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\omega_j$。将此式代入上式便得（6.7）的形状。

充分性。反之，设（6.7）成立。今因 n 行 r 列矩阵 (a_{ip}) 的秩

为 n，故如有必要，更换变数 x_1，x_2，…，x_n 的号码，可以设 $\det(a_{ij}) \neq 0$（i，$j=1$，2，…，n）。这时从 $\omega_i=0$ 解出



第 4.10 图

$$dx_i = \sum_{\alpha=n+1}^{r} e_{i\alpha}(x_1, \cdots, x_r) dx_\alpha \quad (6.8)$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

这时令

$$x_\alpha = x_\alpha^{(0)} + a_\alpha t$$

（$x_\alpha^{(0)}$，a_α 是常数，$\alpha=n+1$，…，r），则（6.8）变为

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum e_{i\alpha}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}^{(0)} + a_{n+1}t, \cdots, x_r^{(0)} + a_r t) a_\alpha \quad (6.9)$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

将此式看做变数 t 的微分方程，设在初始条件

$$\text{当} \quad t=0 \text{ 时}, \quad x_i = c_i \quad (6.10)$$

下的解为

$$x_i = \varphi_i(t, a_{n+1}, \cdots, a_r; c_1, \cdots, c_n) \quad (6.11)$$

则

$$c_i = \varphi_i(0, a_{n+1}, \cdots, a_r; c_1, \cdots, c_n)$$

现在将（6.11）的 φ_i 看做 t，a_{n+1}，…，a_r 的函数，将此 $x_i=\varphi_i$ 代入

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \pi_{ji}$$

先设 a_{n+1}，…，a_r 一定，因 $x_i=\varphi_i$ 满足（6.9），故 $\omega_i=0$。因此，a_{n+1}，…，a_r 也看做变数时可令

$$\omega_i = \sum_\alpha g_{i\alpha} da_\alpha \quad (6.12)$$

当 $t=0$ 时，不论 a_{n+1}，…，a_n 是什么，$x_\alpha = x_\alpha^{(0)}$，$x_i=c_i$，故 $x_p=$ 一定（$p=1$，2，…，r）$dx_p=0$. 从而也可以说

$$\text{在} \quad t=0, \quad g_{i\alpha}=0$$

因为 $d\omega_i=\sum_j \omega_j\wedge\pi_{ji}$，故令 $\pi_{ji}=p_{ji}dt+\sum_\alpha g_{ji\alpha}da_\alpha$。如果只考虑含 dt 的项，则

$$\sum_\alpha \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial t}dt\wedge da_\alpha=-\sum_{k,\alpha}g_{k\alpha}p_{ki}dt\wedge da_\alpha$$

由此得

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial t}=-\sum_k g_{k\alpha}p_{ki} \tag{6.13}$$

然因当 $t=0$ 时 $g_{i\alpha}=0$，故由微分方程的解的唯一性定理知，恒 $g_{i\alpha}=0$，

$$\omega_i=0 \tag{6.14}$$

即在(6.11)里，将 t，a_{n+1}，…，a_r 看做变数时，则(6.11)是(6.14)的解。这时，t，a_{n+1}，…，a_r 不是独立的，而且

$$\varphi_i\left(\frac{t}{k},\ ka_{n+1},\cdots,ka_r\right)=\varphi_i(t,\ a_{n+1},\ \cdots,\ a_r)。$$

原因是，左边的函数仍然满足微分方程（6.9）而且当 $t=0$ 时，$\varphi_i=c_i$。

于是令 $k=t$，则 φ_i 可看做 $a_{n+1}t=x_{n+1}-x_{n+1}^{(0)}$，…，$a_rt=x_r-x_r^{(0)}$ 的函数，

由（6.10）可见，在 $x_{n+1}=x_{n+1}^{(0)}$，…，$x_r=x_r^{(0)}$

$$\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial c_j}\right)=1\neq0\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

故在它的附近，从（6.11）解出 c_1，…，c_n，可以看做

$$c_i=F_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \cdots,\ x_r)$$

因为 c_1，…，c_n 取任意的值，所以

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_p}\right)\text{的秩}=n\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

显然（证毕）。

注　定理 4.9 是在 $\omega_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 线性无关的假设下讨

论的，但是即使 ω_i 线性相关，此定理也成立。

Frobenius 定理常常以下述形式出现。在

$$\omega_i=\sum_{p=1}^{r}a_{ip}dx_p=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

里，设$\det(a_{ij})\neq 0$，解出 dx_1，…，dx_n 得

$$dx_i=\pi_i \tag{6.15}$$

式中令 $x_{n+k}=t_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r-n)$，

$$\pi_i=\sum_{\alpha}a_{i\alpha}(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t_1,\ \cdots,\ t_{r-n})dt_\alpha$$

(6.15) 完全可积的充要条件是

将 $dx_j=\pi_j$ 代入 $d\pi_i$ 里得 0 。

原因是，令 $\omega_i=dx_i-\pi_i$，则 $d\omega_i=-d\pi_i$。

$$d\omega_i=\sum_{j}\omega_j\wedge\pi_{ji}$$

成立的充要条件是当 $\omega_i=dx_i-\pi_i=0$ 时 $d\omega_i=0$ 。

例 考虑 n 维向量空间的 n 个向量 $\boldsymbol{e}_1$，…，$\boldsymbol{e}_n$。又给定了

$$\omega_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ijk}(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_s)dt_k \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

时，以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 为未知向量的微分方程

$$d\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{6.16}$$

完全可积的条件是外微分右边而得之式中再将 (6.16) 代入 $d\boldsymbol{e}_i$ 的地点后变为 0 。即将 (6.16) 代入

$$\sum_{j}d\omega_{ij}\boldsymbol{e}_j+\sum_{j}d\boldsymbol{e}_j\wedge\omega_{ij}=0$$

得

$$\sum_{j}\Big(d\omega_{ij}-\sum_{k}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\Big)\boldsymbol{e}_j=0$$

即

$$d\omega_{ij}-\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=0 \qquad (6.17)$$

这是所求条件．即，这时，对于任意给定的向量 $\boldsymbol{a}_1$，…，$\boldsymbol{a}_n$,(6.16)存在

当 $t_1=t_1^0,\cdots,t_s=t_s^0$ 时,$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}_1$，…，$\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{a}_n$ 的解 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$。

(6.17) 是过去经常引用的结构方程。

习 题 四

1 设在 n 维向量空间V中有二维子向量空间 L_2，于 L_2 中取任意两个线性无关的向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$。在V中决定一基底后，设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的分量为 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，$(y^1, y^2, \cdots, y^n)$。令

$$p^{ij}=\begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix} \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

试证 p^{ij} 的比在 L_2 上与 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的取法无关。设 $i<j$ 时，$\frac{1}{2}n(n-1)$ 个数 p^{ij} 称为 L_2 的 Plücker **坐标**。

2 在 n 维向量空间里，设 n 个向量 $\boldsymbol{a}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 关于一基底的分量为 $(a_i{}^1, a_i{}^2, \cdots, a_i{}^n)$ 时，问

$$A=\det(a_j{}^i)$$

在基底变换下怎样变化？

3 试证在欧氏空间里

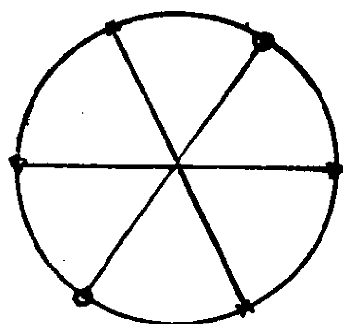
$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$$

4 在欧氏空间里，在平面 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})=k$($\boldsymbol{a}$ 为常向量，k 为常数)上试求离点 $\boldsymbol{p}$ 最近的点。并求其距离。

5 使用确定的共变对称张量 $g=(g_{ij})$，定义任意二反变向量 $u=(u^i)$，$v=(v^i)$ 的内积为 $(u, v)=g_{ij}u^iv^j$ 时，则保持任意的 (u, u) 不变的线性变换保持任意内积 (u, v) 不变。试证明之。

6 设 (g_{ij}) 为二阶共变张量，而且 $\det(g_{ij})\neq 0$，试证其逆矩阵 (g^{ij}) 为反变张量的分量。

7　如图所示，在圆上将关于圆心对称的点贴在一起而得曲面可以考虑表里吗？



第 4.11 图

8　在三维空间里，关于直角坐标满足

$$x'_i \equiv x_i \pmod 1 \quad (i=1,2,3)$$

的二点 (x'_1, x'_2, x'_3) 与 (x_1, x_2, x_3) 看做相同点而得三维流形可定向吗？

9　设 a_1，a_2，a_3 是 x_1，x_2，x_3 的函数，对于 $\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3$，试证下列性质。

（1）ω 为全微分的充要条件是

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i,\ j=1,2,3)$$

（2）$\omega = 0$ 完全可积的充要条件是

$$a_1\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right) + a_2\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right) + a_3\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

10　设 a_i 是 x^1，x^2，…，x^n 的函数，对于 $\omega = a_i dx^i$，令

$$d\omega = \frac{1}{2}A_{ij}dx^i \wedge dx^j \quad (A_{ij} = -A_{ji})$$

则得

$$A_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j}$$

而且 (A_{ij}) 是张量的分量。试述其理由。

11　设 $a_{ij} = -a_{ji}$ 是 x^1，x^2，…，x^n 的函数，对于 $\omega = \frac{1}{2}a_{ij}dx^i \wedge dx^j$，令

$$d\omega = \frac{1}{6}A_{ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

式中的 A_{ijk} 当 i，j，k 作置换时，使绝对值不变。使符号

在偶置换下不变　　在奇置换下变化。

试证这时的 (A_{ijk}) 是反称张量的分量。

第五章　仿射联络空间

§1　仿射联络

前章我们阐述了在 n 维微分流形的各点对应以切空间——向量空间，但尚未给出方法用来对比不同点处的切空间。对于三维欧氏空间的曲面，通过沿此面上的曲线展开可以给切平面之间作对比。而对于 n 维微分流形，仿射联络就是一种方法用来对比切空间之间的关系。在这种情况下，取切空间比欧氏空间稍普遍些的仿射空间。下一章讨论黎曼空间时，取切空间为欧氏空间。

设 n 维微分流形M的邻域U里的坐标系为 $x^1, x^2, \cdots, x^n$，在U中各点 p 处的切空间 T_p 内取自然标架 $\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \boldsymbol{e}_n=\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$。这时，如果给定 n^2 个一次微分形式

$$\omega_j^i=\Gamma_j{}^i{}_k dx^k \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (1.1)$$

用此量可将切空间 T_p 展开在仿射空间里讨论如下(式中 $\Gamma_j{}^i{}_k$ 是 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 的函数)。在这种含义下，(1.1)称为**仿射联络的微分形式**，当此联络给定时，则称在U上给定仿射联络(affine connection)。

考虑展开时，在U内取曲线 $c: x^i=x^i(t)$，沿 c

$$\omega_j{}^i=\alpha_j{}^i dt \quad \left(\alpha_j{}^i=\Gamma_j{}^i{}_k\frac{dx^k}{dt}\text{是 } t \text{ 的函数}\right)$$

今设 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_n$ 为未知向量。将微分方程

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{dx^i}{dt}\boldsymbol{I}_i, \quad \frac{d\boldsymbol{I}_i}{dt}=\alpha_i{}^j\boldsymbol{I}_j \quad (i=1,\ 2,\cdots,n) \qquad (1.2)$$

在初始条件当 $t=t_0$ 时

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{I}_i=\boldsymbol{c}_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.3}$$

下解之，其中设 $\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$，…，$\boldsymbol{c}_n$ 线性无关。于是

$$\boldsymbol{I}_1,\ \boldsymbol{I}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{I}_n\ \text{总是线性无关}\tag{1.4}$$

可以证明如下。

今对于仿射空间内固定基底，设 $\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2$，…，$\boldsymbol{I}_n$ 的分量作成的行列式（将各向量的分量排在各列上）为

$$\varDelta=[\boldsymbol{I}_1,\ \boldsymbol{I}_2\cdots,\ \boldsymbol{I}_n]$$

由行列式的微分法知

$$\frac{d\varDelta}{dt}=\sum_i\left[\boldsymbol{I}_1,\ \cdots,\ \frac{d\boldsymbol{I}_i}{dt},\ \cdots,\ \boldsymbol{I}_n\right]$$

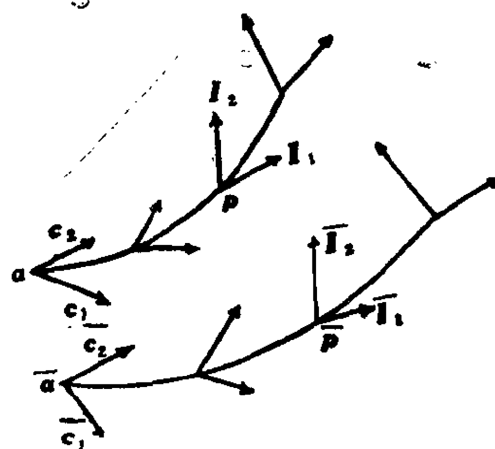
故将(1.2)代入之得

$$\frac{d\varDelta}{dt}=\alpha_i{}^i\varDelta$$

然因在 $t=t_0$

$$\varDelta=[\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{c}_n]\neq 0$$

故满足此微分方程的 $\varDelta$ 不恒为0。即(1.4)得证。



第 5.1 图

其次证明，若改变初始条件(1.3)，则(1.2)的解可通过原来的解经仿射变换得到。

设以(1.3)为初始条件的解为

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+u^i\boldsymbol{c}_i,\qquad \boldsymbol{I}_i=t_i{}^j\boldsymbol{c}_j\tag{1.5}$$

则(1.2) 变为下式。

$$\frac{du^i}{dt}=\frac{dx^j}{dt}t_j{}^i,\quad \frac{dt_j{}^i}{dt}=\alpha_j{}^k t_k{}^i\tag{1.6}$$

于是设新初始条件为

$$\text{当}\qquad t=t_0\ \text{时}\qquad \boldsymbol{p}=\overline{\boldsymbol{a}},\qquad \boldsymbol{I}_i=\overline{\boldsymbol{c}}_i\tag{1.7}$$

作

$$\boldsymbol{p}=\overline{\boldsymbol{a}}+u^i\overline{\boldsymbol{c}}_i,\qquad \boldsymbol{I}_i=t_i{}^j\overline{\boldsymbol{c}}_j\tag{1.8}$$

由(1.6)知，这是满足(1.7)的方程(1.2)的解。(1.5)在仿射变换下得(1.8) (参照 p. 104) .

于是在曲线 $c: x^i = x^i(t)$ 上 $t = t_0$ 的点 p_0 处的切空间，使其自然标架与 $\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_n$ 重迭，c 上各点实现在点 $\boldsymbol{p}$ 处，在各点的自然标架与 $\boldsymbol{I}_1, \cdots, \boldsymbol{I}_n$ 重迭，则可以认为沿曲线 c 的切空间实现在仿射空间里。这就是沿此曲线 c，具有仿射联络的空间 U 的展开。

由上述讨论可见，展开全在仿射变换下合同。

以下考虑的不是自然标架 $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，而是更普遍的标架。先取 $\det(p_i{}^j) \neq 0$ 的 n^2 个函数 $p_i{}^j = p_i{}^j(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，令

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{1.9}$$

取 $\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}}_n$ 为切空间 T_p 内的新标架。设$(p_i{}^j)$ 的逆矩阵为$(q_i{}^j)$，令

$$\overline{\omega}^i = q_h{}^i dx^h$$

则决定展开的式子(1.2)变为下式。第一式变为

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{dx^i}{dt}\boldsymbol{I}_i = q_h{}^j \frac{dx^h}{dt} p_j{}^i \boldsymbol{I}_i$$

于是令

$$\overline{\boldsymbol{I}}_j = p_j{}^i \boldsymbol{I}_i \tag{1.10}$$

则

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{\overline{\omega}^j}{dt}\overline{\boldsymbol{I}}_j$$

而从(1.2)的第二式得

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{I}}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(p_i{}^j \boldsymbol{I}_j) = p_i{}^j \frac{d\boldsymbol{I}_j}{dt} + \frac{dp_i{}^j}{dt}\boldsymbol{I}_j$$

$$= \left(p_i{}^k \frac{\omega_k{}^j}{dt} + \frac{dp_i{}^j}{dt}\right)\boldsymbol{I}_j = \left(p_i{}^k \frac{\omega_k{}^j}{dt} + \frac{dp_i{}^j}{dt}\right) q_j{}^h \overline{\boldsymbol{I}}_h$$

于是令

$$\overline{\omega}_i{}^j = p_i{}^k \omega_k{}^h q_h{}^j + dp_i{}^h q_h{}^j \tag{1.11}$$

则得

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\frac{\overline{\omega}^i}{dt}\overline{\boldsymbol{I}}_i,\qquad \frac{d\overline{\boldsymbol{I}}_i}{dt}=\frac{\overline{\omega}_i{}^j}{dt}\overline{\boldsymbol{I}}_j \tag{1.12}$$

可见，对于(1．2)的解 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$，$\boldsymbol{I}_i=\boldsymbol{I}_i(t)$；由（1.10）决定的$\overline{\boldsymbol{I}}_i=\overline{\boldsymbol{I}}_i(t)$ 与 $\boldsymbol{p}$ 关于由(1.11)决定的 $\overline{\omega}_i{}^j$ 满足(1.12)。在这种含义下，关于 T_p 的标架 $\overline{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\overline{\boldsymbol{e}}_n$ 由(1.11)决定的 $\overline{\omega}_i{}^j$ 以及关于自然标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 决定的 $\omega_i{}^j$ 给出相同的展开。因此称这两个 $\omega_i{}^j$，$\overline{\omega}_i{}^j$ 决定**相同仿射联络**。

特别当 x^1，x^2，…，x^n 变为别的坐标系 $\overline{x}^1$，$\overline{x}^2$，…，$\overline{x}^n$，设对应的自然标架为 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，…，$\overline{\boldsymbol{e}}_n$，则由第四章(5.2)得

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\partial\overline{x}^j}{\partial x^i}\overline{\boldsymbol{e}}_j,\qquad 即\ \overline{\boldsymbol{e}}_i=\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i}\boldsymbol{e}_j \tag{1.13}$$

因此这种情况相当于(1.9)里令 $p_i{}^j=\dfrac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^i}$之时。

更普遍些，关于不一定是自然标架的两组基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 与 $\overline{\boldsymbol{e}}_1,\cdots,\overline{\boldsymbol{e}}_n$ 给定相同仿射联络形式$(\omega_i{}^j)$，$(\overline{\omega}_i{}^j)$时，若

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i=p_i{}^j\boldsymbol{e}_j,\ 故\quad \omega^i=p_j{}^i\overline{\omega}^j$$

则可以验证(1.11)依然成立。

今后假设当给定仿射联络时其展开式是，将（1.2）里的 $\boldsymbol{p}$ 换以 $\boldsymbol{x}$，又 $\boldsymbol{I}_1$，…，$\boldsymbol{I}_n$ 换以 $\boldsymbol{e}_1$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 得

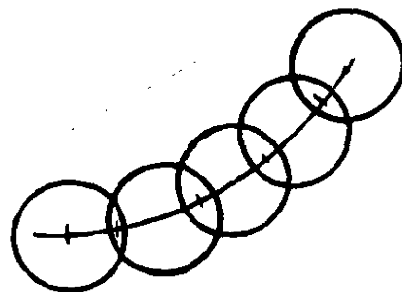
$$d\boldsymbol{x}=\omega^i\boldsymbol{e}_i,\qquad d\boldsymbol{e}_i=\omega_i{}^j\boldsymbol{e}_j \tag{1.14}$$

方才在一坐标邻域中讨论了问题，在微分流形M上的仿射联络可以讨论如下。

当M由坐标邻域 U_i 复盖时，

（1）在各 U_i 中，仿射联络是确定的。

（2）在 $U_i\cap U_j$ 里，在 U_i 里确定的仿射联络与在 U_j 里确定的仿射联络一致。



第 5.2 图

易见，当在M上定义着这样仿射联络时，则沿M中的曲线C可整体地定义切空间的展开。

对偶切空间的展开 以前讨论了切空间的展开，再来探讨对偶空间之间的联系。设切空间的基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 的对偶基底为 $\boldsymbol{f}^1$，$\boldsymbol{f}^2$，…，$\boldsymbol{f}^n$，则

$$\langle \boldsymbol{f}^j, \boldsymbol{e}_i \rangle = \delta_i{}^j. \tag{1.15}$$

在展开时，对于 $\boldsymbol{e}_i$ 的微分

$$d\boldsymbol{e}_i = \omega_i{}^j \boldsymbol{e}_j$$

令 $\boldsymbol{f}^j$ 的微分

$$d\boldsymbol{f}^j = \pi_k{}^j \boldsymbol{f}^k. \tag{1.16}$$

从(1.15)得到式子

$$\langle \boldsymbol{f}^j, d\boldsymbol{e}_i \rangle + \langle d\boldsymbol{f}^j, \boldsymbol{e}_i \rangle = 0,$$

将上二式代入之得

$$\omega_i{}^j + \pi_i{}^j = 0$$

故得对偶基底的展开由

$$d\boldsymbol{f}^i = -\omega_j{}^i \boldsymbol{f}^j \tag{1.17}$$

而定。

共变微分 在具有仿射联络的空间里，有反变向量场 v，关于各切空间里取的基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$，设分量为 v^1，v^2，…，v^n，则此向量为 $v^i\boldsymbol{e}_i$。现在把它展开在仿射空间中，则

$$d(v^i\boldsymbol{e}_i) = dv^i\boldsymbol{e}_i + v^j d\boldsymbol{e}_j$$

由(1.14)可见

$$d(v^i\boldsymbol{e}_i) = (dv^i + v^j\omega_j{}^i)\boldsymbol{e}_i \tag{1.18}$$

故可定义此向量场的**共变微分（绝对微分）**为

$$Dv^i = dv^i + v^j\omega_j{}^i \tag{1.19}$$

这时，随着基底变换

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \to \overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}}_n$$

设分量的变换为

$$v^1, v^2, \cdots, v^n \to \overline{v}^1, \overline{v}^2, \cdots, \overline{v}^n \quad (\omega_i{}^j) \to (\overline{\omega}_i{}^j)$$

则令

$$D\overline{v}^i = d\overline{v}^i + \overline{v}^j\overline{\omega}_j{}^i$$

时，由 $v^i\boldsymbol{e}_i = \overline{v}^i\overline{\boldsymbol{e}}_i$ 可见

$$Dv^i \cdot \boldsymbol{e}_i = D\overline{v}^i \cdot \overline{\boldsymbol{e}}_i$$

当沿曲线 c，反变向量场 $v(v^1, v^2, \cdots, v^n)$ 的共变微分为 0，即 $Dv^i = 0$ 时，如果沿此线将切空间展开在仿射空间之中，则由(1.18)知，$v^i\boldsymbol{e}_i$ 是确定的向量。即在此展开下，v 在仿射空间中作成实际的平行向量场。

又在空间里有向量场 v，若其共变微分恒为 0，则称此向量场为**平行向量场**。这时，沿任意曲线的展开在仿射空间中生成平行向量场。象这样在空间全体上的平行向量场未必总存在。

例 关于切空间的基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，当联络满足

$$\omega_1{}^i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

时，则向量场 $v = (1, 0, 0, \cdots, 0)$ 满足 $Dv^i = 0$。

其次，在

$$Dv^i = \nabla_j v^i \cdot \omega^j$$

中，称 $(\nabla_j v^i)$ 为 (v^i) 的**共变导数**。它是(1,1)型张量。

特别关于自然标架，

$$Dv^i = dv^i + v^k\omega_k{}^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma_k{}^i{}_j\right)dx^j$$

由此得

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k\Gamma_k{}^i{}_j \tag{1.20}$$

对于共变向量场 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$，根据对偶基底的展开式(1.17)知

$$d(u_i\boldsymbol{f}^i) = du_i \cdot \boldsymbol{f}^i + u_i d\boldsymbol{f}^i = (du_i - \omega_i{}^j u_j)\boldsymbol{f}^i$$

于是定义共变微分 Du_i 为

$$Du_i = du_i - u_j\omega_i{}^j$$

则对于基底变换得

$$D\bar{u}_i = p_i^{\ j} Du_j$$

至于共变导数 $\nabla_j u_i$ 是由

$$Du_i = \nabla_j u_i \cdot \omega^j$$

定义的。以此量为分量的张量($\nabla_j u_i$)是二阶共变张量。

在自然标架下

$$\nabla_j u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_k \Gamma_i{}^k{}_j \qquad (1.21)$$

对于二阶混合张量 $t=(t_j{}^i)$，定义其共变微分为

$$\nabla t_j{}^i = dt_j{}^i + t_j{}^k \omega_k{}^i - t_k{}^i \omega_j{}^k$$

这时，在基底变换下

$$Dt_j{}^i \cdot e_i \otimes f^j = D\bar{t}_j{}^i \bar{e}_i \otimes \bar{f}^j,$$

原因是，在展开时

$$d(t_j{}^i \cdot e_i \otimes f^j) = Dt_j{}^i \cdot e_i \otimes f^j.$$

再由 $$Dt_j{}^i = \nabla_k t_j{}^i \cdot \omega^k$$

定义共变导数 $\nabla_k t_j{}^i$。

二阶反变张量(t^{ij})与共变张量(t_{ij})的共变微分的定义分别是

$$Dt^{ij} = dt^{ij} + t^{kj}\omega_k{}^i + t^{ik}\omega_k{}^j \qquad (1.22)$$

$$Dt_{ij} = dt_{ij} - t_{kj}\omega_i{}^k - t_{ik}\omega_j{}^k \qquad (1.23)$$

共变导数 $\nabla_k t^{ij}$，$\nabla_k t_{ij}$ 是由

$$Dt^{ij} = \nabla_k t^{ij} \cdot \omega^k, \qquad Dt_{ij} = \nabla_k t_{ij} \cdot \omega^k$$

定义的。张量($\nabla_k t^{ij}$)是(2,1)型三阶张量，($\nabla_k t_{ij}$)是(0，3)型三阶张量。

又当

$$Dt_{ij} = 0, \qquad Dt_i{}^j = 0, \qquad Dt^{ij} = 0$$

时，分别称(t_{ij})，($t_i{}^j$)，(t^{ij})是**平行张量场**。

对于一般的(r，s)型张量，完全一样可以讨论这样性质。

对于任意张量 t，记其共变微分为 Dt，则下列定理成立。

定理 5.1 当 u，v 为同型的张量场时，则

$$D(u+v)=Du+Dv$$

当 u，v 是张量，但不要求是同型时，则

$$D(u\otimes v)=Du\otimes v+u\otimes Dv$$

特别当 f 是函数，u 为张量场时

$$D(fu)=df\otimes u+fDu$$

证明 全都容易验证。在这里证明 u 为(1,0)型，v 为(0,1)型时

$$D(u\otimes v)=Du\otimes v+u\otimes Dv.$$

设 $u=(u^i)$，$v=(v_j)$，则

$$\begin{aligned}D(u^iv_j)&=d(u^iv_j)+u^kv_j\cdot\omega_k{}^i-u^iv_k\omega_j{}^k\\&=(du^i+u^k\omega_k{}^i)v_j+u^i(dv_j-v_k\omega_j{}^k)\\&=Du^i\cdot v_j+u^i\cdot Dv_j\end{aligned}$$

（证毕）

一般地说，在给定仿射联络的微分流形M上，沿M上的曲线可进行张量的平移如下。先对反变向量作说明。设在M上有曲线 c：$x^i=x^i(t)$，在 c 上一点 $p_1(t=t_1)$处的切空间 T_{p_1} 里有向量 $a=(a^i)$.在初始条件

当 $t=t_1$ 时，$v^i=a^i$

下解 v 的微分方程

$$Dv^i=dv^i+v^k\alpha_k{}^idt=0 \quad (\text{在 } \omega_k{}^i \text{ 里令 } x^j=x^j(t) \text{ 得 } \alpha_k{}^idt)$$

在各 T_p 内考虑以此解(v^i)为分量的向量，称之为将 $t=t_1$ 处的向量(a^i)沿此曲线 c 平移而得者。

共变向量以及一般的张量也完全一样讨论。

一般地说，若存在平行张量场（包括向量场），则沿此空间的曲线适当地选取标架可使该张量的分量沿此曲线是一定的。原因是，在此曲线上一点 p_0 处的切空间里取标架，沿此曲线平移之，则在各 T_p 里得到的标架 $\boldsymbol{e}_1$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 满足 $d\boldsymbol{e}_i=0$，故

$$\omega_i{}^j=0,$$

共变微分为 0，从而张量的微分是 0，分量是常数。

测地线 设仿射联络空间M中的曲线为 c，沿此曲线将自己展开在仿射空间中，若此线变为直线，则称 c 为M的**测地线**或**道路**。

今设测地线 c 为$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t)$，它在仿射空间里的展开为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为常向量)，则

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{\omega^i}{dt}\boldsymbol{e}_i$$

因 $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}=0$，故由此式得

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\boldsymbol{e}_i\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right)\boldsymbol{e}_i+\frac{\omega^i}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right)\boldsymbol{e}_i+\frac{\omega^j}{dt}\frac{\omega_j{}^i}{dt}\boldsymbol{e}_i$$

故

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right)+\frac{\omega^j}{dt}\frac{\omega_j{}^i}{dt}=0 \qquad (1.24)$$

这是测地线的微分方程。令 $v^i=\dfrac{\omega^i}{dt}$，它是 c 的切向量的分量，则(1.24)变为

$$\frac{Dv^i}{dt}=0$$

即

适当地选取参数，则测地线的切向量沿此测地线平行。

§2 仿射联络的挠率与曲率

假设在微分流形M上给定仿射联络。今设局部坐标为 x^1, x^2, $\cdots$, x^n，对于自然标架$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$在切空间内取由

$$\boldsymbol{e}_i=s_i{}^j\frac{\partial}{\partial x^j} \quad (s_i{}^j=s_i{}^j(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n))$$

而定的标架 $\boldsymbol{e}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$。设$(s_i{}^j)$的逆矩阵为$(t_i{}^j)$，则在对偶切空间中

由　　$$\omega^i = t_j^i dx^j$$

决定对偶基底（与 p.95 所述者只是记号的不同）. 这时，设仿射联络微分形式为(ω_i^j).

现在考虑由

$$\bar{e}_i = p_i^j e_j \tag{2.1}$$

而定的另一标架，设(p_i^j)的逆矩阵为(q_i^j)，则

$$\bar{\omega}^i = q_j^i \omega^j \tag{2.2}$$

是它的对偶基底。如前所述，关于此基底的联络微分形式是

$$\bar{\omega}_i^j = p_i^k \omega_k^h q_h^j + d p_i^k q_k^j \tag{2.3}$$

再用矩阵记号表示之。令

$$\omega = (\omega^1,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^n),\ \bar{\omega} = (\bar{\omega}^1,\ \bar{\omega}^2,\ \cdots,\ \bar{\omega}^n)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 \cdots p_1^n \\ p_2^1 & p_2^2 \cdots p_2^n \\ & \cdots\cdots \\ p_n^1 & p_n^2 \cdots p_n^n \end{pmatrix},\ \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 \cdots \omega_1^n \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 \cdots \omega_2^n \\ & \cdots\cdots \\ \omega_n^1 & \omega_n^2 \cdots \omega_n^n \end{pmatrix},\ \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1^1 & \bar{\omega}_1^2 \cdots \bar{\omega}_1^n \\ \bar{\omega}_2^1 & \bar{\omega}_2^2 \cdots \bar{\omega}_2^n \\ & \cdots\cdots \\ \bar{\omega}_n^1 & \bar{\omega}_n^2 \cdots \bar{\omega}_n^n \end{pmatrix}$$

则(2.2)，(2.3)变为

$$\bar{\omega} = \omega P^{-1} \tag{2.4}$$

$$\bar{\Omega} = P\Omega P^{-1} + dPP^{-1} \tag{2.5}$$

由(2.4)得　　$$\bar{\omega} P = \omega \tag{2.6}$$

外微分两边得　　$$d\bar{\omega} P - \bar{\omega} \wedge dP = d\omega$$

由(2.5)可见　　$$dP = \bar{\Omega} P - P\Omega \tag{2.7}$$

将此式代入之得

$$d\bar{\omega} P - \bar{\omega} \wedge (\bar{\Omega} P - P\Omega) = d\omega$$

再由(2.6)可见

$$(d\overline{\omega}-\overline{\omega}\wedge\overline{\Omega})P=d\omega-\omega\wedge\Omega$$

故令

$$\tau=d\omega-\omega\wedge\Omega,\quad \overline{\tau}=d\overline{\omega}-\overline{\omega}\wedge\overline{\Omega} \tag{2.8}$$

则
$$\overline{\tau}P=\tau \tag{2.9}$$

故
$$\overline{\tau}=\tau P^{-1} \tag{2.10}$$

再外微分(2.7)的两边得

$$0=(d\overline{\Omega}P-\overline{\Omega}\wedge dP)-(dP\wedge\Omega+Pd\Omega)$$

将(2.7)的 dP 代入之得

$$0=d\overline{\Omega}P-\overline{\Omega}\wedge(\overline{\Omega}P-P\Omega)-(\overline{\Omega}P-P\Omega)\wedge\Omega-Pd\Omega$$

因为 $\overline{\Omega}\wedge(P\Omega)=\overline{\Omega}P\wedge\Omega$，故 $(d\overline{\Omega}-\overline{\Omega}\wedge\overline{\Omega})P=P(d\Omega-\Omega\wedge\Omega)$

令

$$\Theta=d\Omega-\Omega\wedge\Omega,\quad \overline{\Theta}=d\overline{\Omega}-\overline{\Omega}\wedge\overline{\Omega} \tag{2.11}$$

则得

$$\overline{\Theta}P=P\Theta \tag{2.12}$$

故

$$\overline{\Theta}=P\Theta P^{-1} \tag{2.13}$$

于是令
$$\tau=(\tau^i)$$

则

$$\tau^i=d\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j{}^i \tag{2.14}$$

再令
$$\Theta=(\Theta_i{}^j)$$

则

$$\Theta_i{}^j=d\omega_i{}^j-\omega_i{}^k\wedge\omega_k{}^j \tag{2.15}$$

称 τ 为此仿射联络空间的**挠率形式**(torsion form)，称 Θ 为**曲率形式**(curvature form)。

再令

$$\tau^i=\frac{1}{2}T_j{}^i{}_k\omega^j\wedge\omega^k\quad (T_j{}^i{}_k=-T_k{}^i{}_j) \tag{2.16}$$

则$(T_j{}^i{}_k)$是(1,2)型张量，称之为**挠率张量**。

再令

$$\Theta_i{}^j = \frac{1}{2} R^j{}_{ikh} \omega^k \wedge \omega^h \qquad (R^j{}_{ikh} = -R^j{}_{ihk}) \tag{2.17}$$

则$(R^j{}_{ikh})$是(1,3)型张量，称之为**曲率张量**。

自然标架的情况

这时，关于局部坐标 x^1，x^2，…，x^n，

$$\omega^i = dx^i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.18}$$

令

$$\omega_i{}^j = \Gamma_i{}^j{}_k dx^k \tag{2.19}$$

则由(2.8)得挠率形式

$$\tau^i = d(dx^i) - dx^j \wedge \Gamma_j{}^i{}_k dx^k = -\Gamma_j{}^i{}_k dx^j \wedge dx^k$$

由此得

$$T_j{}^i{}_k = \Gamma_k{}^i{}_j - \Gamma_j{}^i{}_k \tag{2.20}$$

又曲率形式为

$$\begin{aligned}\Theta_i{}^j &= d(\Gamma_i{}^j{}_k dx^k) - (\Gamma_i{}^l{}_h dx^h) \wedge (\Gamma_l{}^j{}_k dx^k) \\ &= d\Gamma_i{}^j{}_k \wedge dx^k - \Gamma_i{}^l{}_h \Gamma_l{}^j{}_k dx^h \wedge dx^k\end{aligned}$$

与(2.17)比较之得[1)]

$$R^j{}_{ikh} = \frac{\partial \Gamma_i{}^j{}_h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_i{}^j{}_k}{\partial x^h} + \Gamma_i{}^l{}_h \Gamma_l{}^j{}_k - \Gamma_i{}^l{}_k \Gamma_l{}^j{}_h \tag{2.21}$$

以下叙述特殊仿射联络。

（Ⅰ） 无挠率的情况

这是

$$\tau^i = 0 \tag{2.22}$$

的情况。使用自然标架，令联络参数为(2.19)的形状，故由(2.16)，(2.20)知

$$\Gamma_j{}^i{}_k = \Gamma_k{}^i{}_j \tag{2.23}$$

这说明 $\Gamma_j{}^i{}_k$ 关于 j，k 对称。在这种意义下，无挠率的仿射联络也

1） 下式右边原文是 $R_{ikh}{}^j$。此处使用的符号与L.P.Eisenhart 著《Riemannian Geometry》的一致。（译者注）。

称为**对称仿射联络**。

（Ⅱ） 曲率是0的情况

对于某种标架 $\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^n$，联络形式是0的情况，即

$$\omega_i{}^j = 0$$

时，由(2.15)得

$$\Theta_i{}^j = 0$$

这时无曲率。

反之，可证下列

定理 5.2 在曲率是0的仿射联络空间中，适当地选取切空间里的标架可使联络参数为 0。

证明 这时，由(2.11)知

$$\Theta = d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0。 \qquad (1)$$

可证这时在各点的切空间里适当改变标架 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \to \overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}}_n$ 可使联络微分形式的矩阵 $\overline{\Omega}$ 为 0.为此，只要证出存在矩阵 P（但 $|P| \neq 0$）使得

$$\overline{\Omega} = P\Omega P^{-1} + dPP^{-1} = 0$$

即可。此式与

$$P\Omega + dP = 0 \qquad (2)$$

等价。

此式可看做 $P = (p_i{}^j)$ 的 n^2 个元 $p_i{}^j$ 关于局部坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 的微分方程组。今将(2)的左边外微分之得

$$d(P\Omega + dP) = dP \wedge \Omega + Pd\Omega$$

将(2)的 $dP = -P\Omega$ 代入之，则得

$$-P\Omega \wedge \Omega + Pd\Omega = P(d\Omega - \Omega \wedge \Omega)$$

由(1)知此式为 0。故根据 Frobenius 定理可得(2)完全可积，在 M 的一点 p_0 存在 $|P| \neq 0$ 的 P。故取这样的 P，则 $\overline{\Omega} = 0$。

象这样，在曲率为 0 的仿射联络空间 M 里，取适当的标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 可使联络参数为 0，展开的定义式(1.14)变为

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = 0$$

故得

$$e_i = c_i \quad (常向量)$$

即不论沿怎样的曲线展开，e_1，…，e_n 平行，然而这时

$$\omega^i e_i = \omega^i c_i$$

一般并不是全微分，故能发生下列情况。

将M上二点 p，q 用二曲线 c_1，c_2 连结之，沿此二曲线将切空间的标架展开在仿射空间中，关于在 p 处切空间的标架 R_p，在 q 处的切空间的标架在沿 c_1 的展开里变为 $R_q^{(1)}$，在沿 c_2 的展开里变为 $R_q^{(2)}$．$R_q^{(1)}$ 与 $R_q^{(2)}$ 的基本向量平行，但顶点的位置一般并不一样．在这种意义下，可以说曲率为 0 的仿射联络空间具有远离平行性。

（Ⅲ） 挠率，曲率都是 0 的空间

在曲率为 0 的空间里，适当地选取标架 e_1，…，e_n 可使联络形式 ω_i^j 为 0。这时，挠率形式是

$$\tau^i = d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = d\omega^i$$

故若挠率也是 0，则

$$d\omega^i = 0$$

因此，对于任意点，在它的适当邻域里存在

$$\omega^i = dy^i$$

的函数 y^1，…，y^n。把它取做新坐标，记以 x^1，…，x^n，则得

$$\omega^i = dx^i.$$

这时，如(Ⅱ)里所示，设 c_1，c_2 是连结坐标邻域内二点 p，q 的曲线。沿此二曲线展开之，设 p 的坐标是(0，0，…，0)，q 的坐标为$(x^1, \cdots, x^n)$，p 在仿射空间内的点为 z_0，则对应于点 q 的点 z 是

$$dz = dx^i c_i \qquad 即 \qquad z = z_0 + x^i c_i$$

它和路径无关．故仿射联络空间M的坐标邻域V与仿射空间的域U一一对应，在V的各点的切空间里适当选取的标架 e_1，…，e_n 对应于U的各点处在平移下可以互相转变的标架。故得

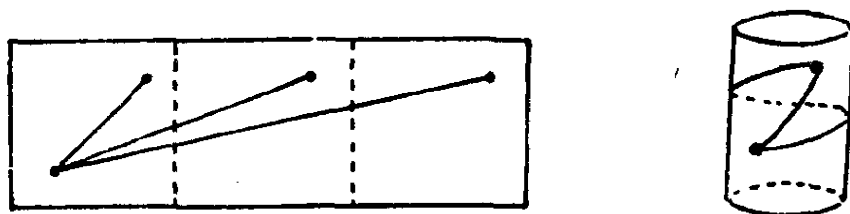
定理 5.3 挠率，曲率都是 0 的仿射联络空间局部地是按自然方式引入仿射联络的仿射空间。

在这种情况下，称此空间为**局部平坦**的。

但这种性质未必整体成立。其实，在三维欧氏空间里采用直角坐标，由

$$X_1^2+X_2^2=1,\ X_3=0$$

表示的正圆柱面上，令 $X_1=\cos u$，$X_2=\sin u$，取 $u, v=X_3$ 为局部坐标，对于 $\omega^1=du$，$\omega^2=dv$，考虑联络参数为 0 的联络。这时，沿连结面上二点 p，q 的曲线展开之，出现下列现象。



第 5.3 图

在连结 p，q 的曲线中，有一圈也不转的，转一圈的，转两圈的，……，沿不同曲线展开，点 q 以各种方式出现。

比安基(Bianchi)恒等式 挠率与曲率满足几种关系式。把它们求出来。首先，挠率形式 τ^i，曲率形式 $\Theta_i{}^j$ 是

$$\tau^i=d\omega^i-\omega^j\wedge\omega_j{}^i \tag{2.24}$$

$$\Theta_i{}^j=d\omega_i{}^j-\omega_i{}^k\wedge\omega_k{}^j \tag{2.25}$$

将(2.24)外微分之得

$$d\tau^i=-d\omega^j\wedge\omega_j{}^i+\omega^j\wedge d\omega_j{}^i$$

从(2.24)，(2.25)解出 $d\omega^i$，$d\omega_j{}^i$，代入上式右边得

$$d\tau^i=-(\tau^j+\omega^k\wedge\omega_k{}^j)\wedge\omega_j{}^i+\omega^j\wedge(\Theta_j{}^i+\omega_j{}^k\wedge\omega_k{}^i)$$

$$d\tau^i+\tau^j\wedge\omega_j{}^i=\omega^j\wedge\Theta_j{}^i \tag{2.26}$$

再将(2.25)外微分之，并代入 $d\omega_i{}^j=\Theta_i{}^j+\omega_i{}^k\wedge\omega_k{}^j$ 得

$$d\Theta_i{}^j=-(\Theta_i{}^k+\omega_i{}^h\wedge\omega_h{}^k)\wedge\omega_k{}^j+\omega_i{}^k\wedge(\Theta_k{}^j+\omega_k{}^h\wedge\omega_h{}^j)$$

由此得

$$d\Theta_i{}^j + \Theta_i{}^k \wedge \omega_k{}^j + \omega_i{}^k \wedge \Theta_k{}^j = 0 \tag{2.27}$$

由(2.16)，(2.17)知

$$\tau^i = \frac{1}{2} T_j{}^i{}_k \omega^j \wedge \omega^k, \quad \Theta_i{}^j = \frac{1}{2} R^j{}_{ikh} \omega^k \wedge \omega^h \tag{2.28}$$

故

$$d\tau^i + \tau^j \wedge \omega_j{}^i = \frac{1}{2}(dT_j{}^i{}_k \wedge \omega^j \wedge \omega^k + T_j{}^i{}_k d\omega^j \wedge \omega^k - $$

$$- T_j{}^i{}_k \omega^j \wedge d\omega^k) + \frac{1}{2} T_k{}^j{}_h \omega^k \wedge \omega^h \wedge \omega_j{}^i \tag{2.29}$$

将 $d\omega^j = \omega^h \wedge \omega_h{}^j$，$d\omega^k = \omega^h \wedge \omega_h{}^k$ 代入之，并用

$$dT_j{}^i{}_k + T_j{}^h{}_k \omega_h{}^i - T_h{}^i{}_k \omega_j{}^h - T_j{}^i{}_h \omega_k{}^h = DT_j{}^i{}_k = \nabla_h T_j{}^i{}_k \cdot \omega^h$$

则

$$d\tau^i + \tau^j \wedge \omega_j{}^i = \frac{1}{2} \nabla_h T_j{}^i{}_k \omega^h \wedge \omega^j \wedge \omega^k \tag{2.30}$$

由(2.26)，(2.30)得

$$\nabla_h T_j{}^i{}_k + \nabla_j T_k{}^i{}_h + \nabla_k T_h{}^i{}_j = R^i{}_{jkh} + R^i{}_{khj} + R^i{}_{hjk} \tag{2.31}$$

同理，从(2.27)，(2.28)知，当挠率为 0 时

$$\nabla_l R^i{}_{jkh} + \nabla_k R^i{}_{jhl} + \nabla_h R^i{}_{jlk} = 0 \tag{2.32}$$

成立。(2.31)，(2.32)称为**比安基**(Bianchi)**恒等式**。

习 题 五

1 在平面上，关于笛卡儿坐标 x^1，x^2 的自然标架，设联络形式是

$$\omega_1{}^1 = 0, \quad \omega_2{}^1 = 0, \quad \omega_1{}^2 = 0, \quad \omega_2{}^2 = dx^1$$

这时

（1） 试求挠率，曲率，

（2） 试求测地线。

2 如果在前题里，设联络形式是

$$\omega_1{}^1 = 0,\ \omega_2{}^1 = dx^2,\ \omega_1{}^2 = dx^1,\ \omega_2{}^2 = 0.$$

试问挠率，曲率各是多少？并求测地线的微分方程。

3 在欧氏平面里，关于直角坐标 x^1，x^2，

$$(x^1)' \equiv x^1,\ (x^2)' \equiv x^2 \quad (\text{mod } 1)$$

时，将点$((x^1)', (x^2)')$与(x^1, x^2)看做同一点，关于自然标架，导入平坦联络

$$\omega_1{}^1=0,\ \omega_2{}^1=0,\ \omega_1{}^2=0,\ \omega_2{}^2=0.$$

试问这时的闭测地线的方程是什么？

4 在三维微分流形里，关于适当选取的标架，联络形式$(\omega_j{}^i)$如下所示。试问沿其中的曲线，切空间的展开具有什么性质？

(1) $\omega_1{}^2=0,\ \omega_1{}^3=0$　　(2) $\omega_2{}^1=0,\ \omega_3{}^1=0$

5 设仿射联络的挠率张量为$(T_j{}^i{}_k)$，曲率张量为$(R^i{}_{jkh})$。试证下式。

(1) 当f为函数时，

$$\nabla_j\nabla_k f-\nabla_k\nabla_j f=T_k{}^i{}_j\nabla_i f$$

(2) 当(v^i)为反变向量时，

$$\nabla_k(\nabla_l v^i)-\nabla_l(\nabla_k v^i)=R^i{}_{jkl}v^j+T_l{}^j{}_k\nabla_j v^i$$

第六章　黎曼空间

§1　n 维黎曼空间

在 n 维微分流形M上，给定对称正定二阶共变张量场 g 时，则称M为以 g 为基本张量的黎曼空间(Riemannian space, Riemannian manifold)。这时，对于M的各点 p，切空间 T_p 变成欧氏向量空间，其内积由 g 而定。于此空间中可以考虑向量的长，以及二向量间的夹角。

现在，关于坐标系 x^1，x^2，…，x^n 考虑自然标架，设 g 的分量为(g_{ij})，u，v 的反变分量为$(u^1, u^2, \cdots, u^n)$，$(v^1, v^2, \cdots, v^n)$，则内积为

$$(u,v) = g_{ij}u^i v^j \tag{1.1}$$

向量之长为

$$|u| = (u,\ u)^{1/2} = \sqrt{g_{ij}u^i u^j} \tag{1.2}$$

设 u，v 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{(u,\ v)}{|u|\cdot|v|} = \frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{ij}u^i u^j}\sqrt{g_{ij}v^i v^j}} \tag{1.3}$$

又如果在M里有曲线 $p=p(t)$，用坐标表示之为 $x^i = x^i(t)$，则切向量之长为

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\ \frac{dx^j}{dt}}$$

此曲线在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 间的弧长可由

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\ \frac{dx^j}{dt}}\,dt$$

定义。如果将 t_1 看做常数，$t_2 = t$ 看做变数，则

$$\left|\frac{ds}{dt}\right|^2=g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

可将此式写做

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j \tag{1.4}$$

一般地可以认为黎曼空间的度量是由 g 决定的，如果用局部坐标，则可用(1.4)形状的式子表示度量。因此(1.4)是局部地定义黎曼空间的基本公式，普通采用这样表示法（若强调张量性质，右边应写做 $g_{ij}dx^i\otimes dx^j$）。

正交标架 根据二次形的基本定理知，作适当的变换 $\overline{u}^i=q_j{}^iu^j$，正定二次形 $g_{ij}u^iu^j$ 可变为

$$g_{ij}u^iu^j=\sum_i(\overline{u}^i)^2$$

的形状。因此，对于(1.4)，适当地取 x^1，x^2，…，x^n 的函数 $q_j{}^i$，通过

$$\omega^i=q_j{}^idx^j$$

可使

$$ds^2=\sum_i(\omega^i)^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2 \tag{1.5}$$

这个变换，用切空间里的标架叙述之，是从自然架标 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 通过

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i=q_i{}^j\boldsymbol{e}_j$$

变为 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，…，$\overline{\boldsymbol{e}}_n$，这是黎曼空间中的正交标架。

黎曼联络 在黎曼空间里可以引进与空间有密切关系的仿射联络，称之为**黎曼联络**。

定理 6.1 在黎曼空间里只存在一个满足下列条件的仿射联络。

（i） 无挠率，

（ii） 关于这种联络，基本二阶共变张量场 g 平行。

证明 取坐标系 x^1，x^2，…，x^n，考虑自然标架，设基本二阶共变张量的分量为(g_{ij})。又设仿射联络的微分形式为

$$\omega_j{}^i=\Gamma_j{}^i{}_kdx^k\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1}$$

只要证出满足(i)，(ii) 的 $\omega_j{}^i$ 只有一组即可。

首先，条件(i)是

$$\Gamma_{j}{}^{i}{}_{k} = \Gamma_{k}{}^{i}{}_{j} \tag{2}$$

条件(ii) 是

$$Dg_{ij} = dg_{ij} - g_{ik}\omega_j{}^k - g_{kj}\omega_i{}^k = 0$$

由(1)知此式变为

$$g_{ik}\Gamma_{j}{}^{k}{}_{l} + g_{kj}\Gamma_{i}{}^{k}{}_{l} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \tag{3}$$

于是令

$$\Gamma_{ijl} = g_{ik}\Gamma_{j}{}^{k}{}_{l}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{ij,l} \tag{4}$$

则由(2)得

$$\Gamma_{ijl} = \Gamma_{ilj} \tag{5}$$

又(3)变为

$$\Gamma_{ijl} + \Gamma_{jil} = g_{ij,l} \tag{6}$$

对调 j 与 l，并参照(5)得

$$\Gamma_{ijl} + \Gamma_{lij} = g_{il,j} \tag{7}$$

在(6)里，对调 i 与 l 并参照(5)得

$$\Gamma_{lij} + \Gamma_{jil} = g_{lj,i} \tag{8}$$

(6)+(7)-(8)得

$$2\Gamma_{ijl} = g_{ij,l} + g_{il,j} - g_{lj,i} \tag{9}$$

今设(g_{ij})的逆矩阵为(g^{ij})。即

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i{}^j$$

于是从(4)的第一式得

$$g^{ki}\Gamma_{ijl} = \Gamma_{j}{}^{k}{}_{l} \tag{10}$$

从此式，(4)的右式以及(9)得

$$\Gamma_{j}{}^{k}{}_{l} = \frac{1}{2}g^{ki}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}\right) \tag{11}$$

由上述讨论可见，$\Gamma_{j}{}^{k}{}_{l}$ 由(g_{ij})决定，同时(i)，(ii)得到满足，而且决定方法只有一种。（证毕）。

因此，在黎曼空间里，满足(i)，(ii)的联络即黎曼联络唯一地存在。而且这种联络和怎样选取标架无关。在定理 6.1 的证明里使用自然标架，用 g_{ij} 表达了联络系数就是(11)。又 $\omega_j{}^i$ 称为**黎曼联络的微分形式**。以下使用正交标架来讨论。

使用正交标架，则基本张量的分量为(δ_{ij})故

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

由于第五章(2.14)可见，无挠率要求联络微分形式$(\omega_j{}^i)$满足

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i$$

关于这种联络，基本张量 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 平行是

$$Dg_{ij}=-\delta_{ik}\omega_j{}^k-\delta_{kj}\omega_i{}^k=0$$

故

$$\omega_j{}^i+\omega_i{}^j=0$$

将这些结果整理之得

定理 6.2 n 维黎曼空间的联络形式$(\omega_j{}^i)$如下所示。

(1) 关于自然标架，当 $ds^2=g_{ij}dx^idx^j$ 时

$$\omega_j{}^i=\Gamma_j{}^i{}_kdx^k$$

式中

$$\Gamma_j{}^i{}_k=\frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right)\tag{1.6}$$

(2) 关于正交标架，设 $ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2$，则

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i,\quad \omega_j{}^i=-\omega_i{}^j\tag{1.7}$$

黎曼空间的展开　在黎曼空间里，各点处的切空间可看做欧氏向量空间。原因是：通过下列讨论可见，运用黎曼联络可以展开在欧氏空间之中。

首先设线素的平方为

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2\tag{1.8}$$

再设它的黎曼联络形式为$(\omega_j{}^i)$，则

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i,\quad \omega_j{}^i=-\omega_i{}^j$$

于是

$$d\boldsymbol{x}=\omega^i\boldsymbol{e}_i,\quad d\boldsymbol{e}_i=\omega_i{}^j\boldsymbol{e}_j\tag{1.9}$$

决定展开。即在此黎曼空间M里，考虑曲线 $c: p=p(t)$，沿 c 在初始条件

当 $t=t_0$ 时，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{c}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

式中 $(\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{c}_j)=\delta_{ij}$

下，求(1.9)的解。由 $p.70$ 引理知

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij} \tag{1.10}$$

即 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 成为标准正交基。这样，沿曲线c的切空间可展开在欧氏空间中。如于前面 $p.71$ 所述，这种展开与各切空间内的正交标架的选法无关。

根据(1.9),(1.10)

$$(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x})=(\omega^i\boldsymbol{e}_i, \omega^j\boldsymbol{e}_j)=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

故与(1.8)比较得

将黎曼空间的曲线展开在欧氏空间里，其长不变。

又如果存在向量场与张量场，则可以定义它们的共变微分。这从黎曼联络是仿射联络显然。至于平行性，由黎曼联络的定义知基本张量场 g 作成平行量。还能证明

定理 6.3 二向量场的内积在平移下不变。特别是向量场的长不变。

证明 从用黎曼联络的展开看几乎是显而易见的。如果用计算证明请见以下叙述。设二向量为 $u=(u^i)$，$v=(v^i)$。因 $Dg_{ij}=0$，故

$$d(g_{ij}u^iv^j)=g_{ij}Du^i\cdot v^j+g_{ij}u^i\cdot Dv^j=0$$

故在平移下，$g_{ij}u^iv^j$ 不变。

§2 测 地 线

沿黎曼空间M中的曲线 $c: p=p(t)$，用黎曼联络可展开成欧氏空间的直线者，是M的测地线。今设从此曲线上一点 $(t=t_0)$ 到任意点 $p(t)$ 的弧长为 s，则此曲线在欧氏空间里的展开是

$$\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ 为常向量}, |\boldsymbol{a}|=1)$$

故
$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}=\boldsymbol{a},\quad \frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2}=0$$

由(1.9)可见

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^i}{ds}\right)+\frac{\omega^j}{ds}\ \frac{\omega_j{}^i}{ds}=0 \tag{2.1}$$

这是黎曼空间里的测地线的微分方程。

又如果采取参数 $t=cs+b$ （c,b 为常数），则

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right)+\frac{\omega^j}{dt}\ \frac{\omega_j{}^i}{dt}=0 \tag{2.2}$$

反之，满足此方程的曲线的弧长 s 与 t 间成立 $t=cs+b$可证明如下。因为 $v^i=\omega^i/dt$ 沿此曲线平行，故由定理 6.3 知其长$\sum\limits_i(v^i)^2$一定。即

$$\sqrt{\sum_i\left(\frac{\omega^i}{dt}\right)^2}=\text{一定}\quad (\text{设为 } 1/c$$

由此得

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{c},\ t=cs+b$$

法坐标 在黎曼空间的一点 p 的邻域里考虑局部坐标 x^1，x^2，$\cdots$，x^n. 在测地线的微分方程(2.2)里因 $\omega^i=dx^i$，$\omega_j{}^i=\Gamma_j{}^i{}_k dx^k$，故方程变为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma_j{}^i{}_k\frac{dx^j}{dt}\ \frac{dx^k}{dt}=0 \tag{2.3}$$

$$(\Gamma_j{}^i{}_k=\Gamma_j{}^i{}_k(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n))$$

今设 $v^i=dx^i/dt$，则此式变为

$$\frac{dx^i}{dt}=v^i,\qquad \frac{dv^i}{dt}=-\Gamma_j{}^i{}_k v^j v^k \tag{2.4}$$

于是设点 p 的局部坐标为 p^1，p^2，$\cdots$，p^n，对于任意选取的常数组 $a=(a^1,\ a^2,\ \cdots,\ a^n)$，在初始条件

当 $t=0$ 时，$x^i=p^i$，$v^i=a^i$ (2.5)

下，设(2.4)的解为

$$x^i=\varphi^i(t,\ a),\ v^i=\psi^i(t,\ a)$$

在方才得到的函数里以 $ca=(ca^1,\ ca^2,\ \cdots,\ ca^n)$代替 $a=(a^1,\ a^2,\ \cdots,\ a^n)$，以 $(1/c)t$ 代替 t，作出

$$x^i=\varphi^i\left(\frac{1}{c}t,ca\right),\quad v^i=\frac{1}{c}\ \psi^i\left(\frac{1}{c}t,ca\right) \tag{2.6}$$

这些函数是满足初始条件

当 $t=0$ 时，$x^i=p^i$，$v^i=a^i$，

(2.4)的解。初始条件从(2.5)立即可以理解，是解可以证明如下。首先，令 $\partial\varphi^i/\partial t=\varphi_t{}^i$，$\partial\psi^i/\partial t=\psi_t{}^i$，则

$$\varphi_t{}^i(t,\ a)=\psi_i(t,\ a)$$

$$\psi_t{}^i(t,a)=-\Gamma_j{}^i{}_k(\varphi^1(t,a),\cdots,\varphi^n(t,a))\psi^j(t,a)\psi^k(t,\ a)$$

恒成立。在此式中，将$(1/c)t$ 代入 t 处，ca 代入 a 处，注意

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \varphi^i\left(\frac{1}{c}t,ca\right)=\frac{1}{c}\varphi_t{}^i\left(\frac{1}{c}t,\ ca\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \psi^i\left(\frac{1}{c}t,\ ca\right)=\frac{1}{c}\psi_t{}^i\left(\frac{1}{c}t,\ ca\right)$$

可见(2.6)是(2.4)的解。

因为(2.6)是在初始条件(2.5)下的解．由微分方程的解的唯一性知

$$\varphi^i\left(\frac{1}{c}t,\ ca\right)=\varphi^i(t,\ a),$$

$$\frac{1}{c}\psi^i\left(\frac{1}{c}t,\ ca\right)=\psi^i(t,\ a)$$

特别是令 $c=t$，则得

$$\varphi^i(1,\ ta)=\varphi^i(t,\ a) \tag{2.7}$$

再令

$$y^i=ta^i,\quad F^i(y)=\varphi^i(1,y)$$

考虑

$$x^i=F^i(y)$$

在 $y=0$ 处立即可证

$$\frac{\partial(F^1, F^2, \cdots, F^n)}{\partial(y^1, y^2, \cdots, y^n)}=1 \tag{2.8}$$

如下。由(2.7)可见

$$\varphi^i(t, a)=F^i(ta)$$

两边对 t 求导数并令 $t=0$，则从(2.5)知左边为 a^i，故

$$a^i=\frac{\partial F^i}{\partial y^j}(0)a^j$$

因为 a^1，a^2，…，a^n 任意，故

$$\frac{\partial F^i}{\partial y^j}(0)=\delta_j{}^i$$

于是(2.8)成立。

从(2.8)可知，在 $y=0$ 即在点 p 附近可将 y^1，y^2，…，y^n看做局部坐标。称此坐标为**法坐标**。

以下，根据这种想法计算 ds^2。

首先，在点 p 取正交标架，沿与单位向量 $a=(a^1,a^2,\cdots,a^n)$ 相切的测地线，将此正交标架平移之，则在各点引进正交标架。关于这种标架，设

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2 \tag{2.9}$$

再设黎曼联络的微分形式为 $\omega_j{}^i$，则当 a 一定时

$$\omega^i=a^idt,\quad \omega_j{}^i=0 \quad (t\text{ 为沿测地线的弧长})$$

故一般得到

$$\omega^i=a^idt+\rho^i,\quad \omega_j{}^i=\rho_j{}^i \tag{2.10}$$

式中 ρ^i，$\rho_j{}^i$ 是 da^1，…，da^n 的一次微分形式。因

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i,$$

故

$$da^i\wedge dt+d\rho^i=(a^jdt+\rho^j)\wedge\rho_j{}^i \tag{2.11}$$

于是令

$$\rho^i=A_j{}^i(t, a)da^j,\quad \rho_j{}^i=A_j{}^i{}_k(t, a)da^k$$

因 $\rho_j{}^i=-\rho_i{}^j$，故

$$A_j{}^i{}_k=-A_i{}^j{}_k \tag{2.12}$$

在(2.11)里考虑 $dt\wedge da^j$ 项

$$da^i\wedge dt+\frac{\partial A_j{}^i}{\partial t}dt\wedge da^j=a^j dt\wedge A_j{}^i{}_k da^k$$

由此得

$$\frac{\partial A_j{}^i}{\partial t}=\delta_j{}^i+a^k A_k{}^i{}_j \tag{2.13}$$

将(2.10)代入(2.9)得

$$ds^2=\sum_i(\omega^i)^2=\sum_i(a^i dt+\rho^i)^2=(dt)^2+2\sum_i a^i\rho^i dt+\sum_i(\rho^i)^2$$

以下证明 $\sum_i a^i\rho^i=\sum_{i,j}a^i A_j{}^i da^j=0$。今因 a^i 的平方和是1，故可看做 $n-1$ 个变数 u^1，u^2，…，u^{n-1} 的函数。于是设 $\lambda=1, 2, \cdots, n-1$ ，由(2.13)得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum a^i A_j{}^i\frac{\partial a^j}{\partial u^\lambda}\right)=\sum_{i,j}a^i\frac{\partial a^j}{\partial u^\lambda}\frac{\partial A_j{}^i}{\partial t}$$

$$=\sum_{i,j}a^i\frac{\partial a^j}{\partial u^\lambda}(\delta_j{}^i+\sum a^k A_k{}^i{}_j) \tag{2.14}$$

因 $\sum_i(a^i)^2=1$，故 $\sum_i a^i\frac{\partial a^i}{\partial u^\lambda}=0$，从而

$$\sum_{i,j}a^i\frac{\partial a^j}{\partial u^\lambda}\delta_j{}^i=\sum_i a^i\frac{\partial a^i}{\partial u^\lambda}=0$$

再由(2.12)知

$$\sum_{i,k}a^j a^k A_k{}^i{}_j=0$$

故(2.14)为0， $\sum_{i,j}a^i A_j{}^i\frac{\partial a^j}{\partial u^\lambda}$ 与 t 无关。然而当 $t=0$ 时，既使 a^i 变化，点也不变，故 $\omega^i=0$，因此 $\rho^i=0$，$A_j{}^i=0$.从而

$$\sum_{i,j}a^i A_j{}^i\frac{\partial a^j}{\partial u^\lambda}=0$$

在 $t=0$ 成立，故此式恒成立。于是 $\sum_i a^i\rho^i=0$，最后得

$$ds^2=(dt)^2+\sum_i(\rho^i)^2\quad(\rho^i\text{ 不含 }dt) \tag{2.15}$$

由此性质可导出下列定理。

定理 6.4 在黎曼空间里，考虑各点的充分近处，则从此点到其他一点的最短路径是连结此二点的测地线。

证明 以一点 p 为基础将线素表示为(2.15)的形状，则从 $t=0$ 的点到$(t_0a^1, t_0a^2, \cdots, t_0a^n)$的点的弧长为

$$L=\int\sqrt{(dt)^2+\sum_i(\rho^i)^2}=\int_0^{t_0}\sqrt{1+\sum_i\left(\frac{\rho^i}{dt}\right)^2}dt\geqslant t_0$$

等号成立是 $\rho^i=0$ 即 $da^1=da^2=\cdots=da^n=0$，$a=(a^1, a^2, \cdots, a^n)$一定的时候，亦即此曲线是测地线之时（证毕）。

例 球面的情况。

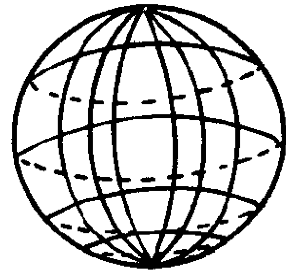
在三维欧氏空间里放一个半径 r 的球面，于其上一点 p 作切平面。于此平面上取直角坐标轴。在点 p 作大圆与长为1的向量 $a=(a^1, a^2)$相切。在此圆上考虑从点 p 算起弧长为 t 的点，则

$$y^1=ta^1,\quad y^2=ta^2 \tag{2.16}$$

为此点的法坐标。这时设

$$0\leqslant t<\pi r$$

则球面上的点除了以 p 为一端点的直径的另一端点全可用(2.16)表示。此外，这时



第 6.1 图

$$ds^2=dt^2+r^2\sin^2\frac{t}{r}((da^1)^2+(da^2)^2)$$

这是相当于(2.15)之式。再设 $a^1=\cos\varphi$，$a^2=\sin\varphi$，则得

$$(da^1)^2+(da^2)^2=d\varphi^2.$$

§3 曲率张量

黎曼空间的线素 ds 的平方 ds^2 关于任意选取的标架由

$$ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j \tag{3.1}$$

给定。这时，设黎曼联络形式为$(\omega_j{}^i)$，因为黎曼联络是无挠率的仿射联络，故

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j{}^i \tag{3.2}$$

又因(g_{ij})关于这种联络平行，故

$$dg_{ij} = g_{kj}\omega_i{}^k + g_{ik}\omega_j{}^k \tag{3.3}$$

曲率形式是

$$\Theta_j{}^i = d\omega_j{}^i - \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i \tag{3.4}$$

今将(3.3)的两边外微分之，则

$$0 = dg_{ki} \wedge \omega_i{}^k + g_{kj}d\omega_i{}^k + dg_{ik} \wedge \omega_j{}^k + g_{ik}d\omega_j{}^k$$

用(3.3)的关系式代替 dg_{kj}，dg_{ik}，又运用(3.4)得

$$g_{kj}\Theta_i{}^k + g_{ik}\Theta_j{}^k = 0 \tag{3.5}$$

故令

$$g_{ik}\Theta_j{}^k = \Theta_{ji} \tag{3.6}$$

则得

$$\Theta_{ij} + \Theta_{ji} = 0 \tag{3.7}$$

今令

$$\Theta_j{}^i = \frac{1}{2}R^i{}_{jkh}\omega^k \wedge \omega^h \quad (R^i{}_{jkh} = -R^i{}_{jhk}) \tag{3.8}$$

再令

$$R_{jikh} = g_{il}R^l{}_{jkh} \tag{3.9}$$

则

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2}R_{ijkh}\omega^k \wedge \omega^h \tag{3.10}$$

由(3.7)可见

$$R_{ijkh} = -R_{jikh} \tag{3.11}$$

又因黎曼联络是无挠率的仿射联络，故由第五章(2.31)知

$$R^i{}_{jkh} + R^i{}_{khj} + R^i{}_{hjk} = 0 \tag{3.12}$$

此式乘以 g_{li} 并缩短，所得式的 l 再改为 i，则

$$R_{ijkh} + R_{ikhj} + R_{ihjk} = 0 \tag{3.13}$$

又能导出下式。

$$R_{ijkh} = R_{khij} \tag{8.14}$$

原因是，从(3.11)，(3.12)得

$$R_{ijkh} = -R_{ikhj} - R_{ihjk} = R_{kihj} + R_{hijk}$$
$$= (-R_{khji} - R_{kjih}) + (-R_{hjki} - R_{hkij})$$

$$= R_{khij} + (R_{jkih} + R_{jhki}) + R_{khij}$$
$$= 2R_{khij} - R_{jihk} = 2R_{khij} - R_{ijkh}$$

故得
$$2R_{ijkh} = 2R_{khij}$$
即得(3.14)。

再从第五章(2.32)得 $\nabla_l R^i{}_{jkh} + \nabla_k R^i{}_{jhl} + \Delta_h R^i{}_{jlk} = 0$，乘以 g_{mi}，关于 i 相加，因为
$$\nabla_l(g_{mi}R^i{}_{jkh}) = \nabla_l g_{mi} \cdot R^i{}_{jkh} + g_{mi}\nabla_l R^i{}_{jkh} = g_{mi}\nabla_l R^i{}_{jkh}$$
故得
$$\nabla_l R_{ijkh} + \nabla_k R_{ijhl} + \nabla_h R_{ijlk} = 0 \tag{3.15}$$
以下，将曲率张量的性质整理一下。从 $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ 可求得
$$\Gamma_j{}^i{}_k = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$
$$R^i{}_{jkh} = \frac{\partial \Gamma_j{}^i{}_h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_j{}^i{}_k}{\partial x^h} + \Gamma_j{}^l{}_h \Gamma_l{}^i{}_k - \Gamma_j{}^l{}_k \Gamma_l{}^i{}_h$$
而且
$$R_{ijkh} = g_{jl}R^l{}_{ikh}$$
$$R_{ijkh} = -R_{jikh},\quad R_{ijkh} = -R_{ijhk},\quad R_{ijkh} = R_{khij}$$
$$R_{ijkh} + R_{ikhj} + R_{ihjk} = 0$$
$$\nabla_l R_{ijkh} + \nabla_k R_{ijhl} + \nabla_h R_{ijlk} = 0$$
二维情况　这时，从(3.6)可见，
$$\Theta_{11} = 0,\quad \Theta_{22} = 0,\quad \Theta_{12} = -\Theta_{21}$$
由以前的讨论得
$$\Theta_{12} = R_{1212}\omega^1 \wedge \omega^2$$
对于 R_{ijkh} 只有
$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$$
值得讨论，其他为 0 。$-R_{1212}$是高斯曲率。

利齐(Ricci)张量，数量曲率　共变张量 g 的分量所作成的矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵 (g^{ij}) 是反变张量的分量(参照习题四第 6 题)。今以 g^{hj} 乘 (3.5)，关于 j 相加得
$$\Theta_i{}^h + g^{hj} g_{ik} \Theta_j{}^k = 0$$

关于 i，h 缩短之，得

$$\Theta_i{}^i + \Theta_j{}^j = 0 \text{ 即 } 2\Theta_i{}^i = 0,\ \Theta_i{}^i = 0$$

故由(3.8)可得

$$R^i{}_{ikh} = 0 \tag{3.16}$$

考虑 $R^i{}_{jkh}$ 关于 i，h 缩短，令

$$R_{kh} = R^i{}_{khi} \tag{3.17}$$

称张量(R_{kh})为**利齐(Ricci)张量**。它是对称张量，即

$$R_{kh} = R_{hk} \tag{3.18}$$

原因是,在(3.12)里关于 i，h 缩短,由于(3.16)以及 $R^i{}_{khj} = -R^i{}_{kjh}$得

$$R_{jk} - R_{kj} = 0$$

再作 $g^{ij}R_{ki}$，关于 i，k 缩短之，令

$$R = g^{ij}R_{ij} \tag{3.19}$$

则R是在黎曼空间各点决定的数即数量。称为**数量曲率**。

定理 6.5 曲率为 0 的黎曼空间是局部欧氏空间。

证明 如果在此黎曼空间里取正交标架，则线素的平方为

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \cdots + (\omega^n)^2$$

再考虑 $n+1$ 个未知向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ 的微分方程

$$d\boldsymbol{x} = \omega^i \boldsymbol{e}_i,\ d\boldsymbol{e}_i = \omega_i{}^j \boldsymbol{e}_j \tag{1}$$

此方程完全可积的充要条件是结构方程

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j{}^i,\ d\omega_j{}^i = \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i$$

成立。今因曲率为 0，故这些式子成立。因此考虑满足 $(\boldsymbol{e}_i{}^{(0)},\ \boldsymbol{e}_j{}^{(0)}) = \delta_{ij}$ 的 $\boldsymbol{e}_i{}^{(0)}$，在某处满足初始条件

$$\boldsymbol{x} = 0,\ \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i{}^{(0)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的解，得$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$（$p$.69引理）。使用解向量 $\boldsymbol{x}$，由(1)得

$$(d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x}) = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \cdots + (\omega^n)^2 = ds^2$$

所以是局部欧氏空间（证毕）。

§4 超曲面与常曲率空间

三维空间的二维曲面可以看做二维黎曼空间。对于一般的维数考虑这个问题。有 n 维黎曼空间M，假设将它一一映射在 $n+1$ 维欧氏空间 E_{n+1} 中如下所示。

设M的局部坐标为$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$，E_{n+1} 的点 $\boldsymbol{x}$ 的直角坐标为$(X^1, X^2, \cdots, X^{n+1})$，表示这个映射φ的函数是

$$X^r = \varphi_r(x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad (r=1, 2, \cdots, n+1) \tag{4.1}$$

并设关于 n 行，$n+1$ 列矩阵$(\partial\varphi_r/\partial x^i)$

$$\left(\frac{\partial\varphi_r}{\partial x^i}\right)\text{的秩} = n \tag{4.2}$$

这时，称 $\varphi(M)$为 E_{n+1} 的**超曲面**。条件(4.2)与M的局部坐标的取法无关。

考虑
$$ds^2 = (d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) \tag{4.3}$$
由(4.1)得
$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{4.4}$$
式中
$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^j}\right) \tag{4.5}$$

由(4.2)可见，满足 $\det(g_{ij}) \neq 0$ 的条件，而且 (g_{ij}) 正定。故(4.4)是超曲面 $S=\varphi(M)$上的黎曼度量。我们来讨论这种黎曼空间。

现在

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^1}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^n}$$

是 E_{n+1} 里的向量，它们张成超曲面S的切空间。可取其线性组合作成标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}$，$\cdots\boldsymbol{e}_n$。令

$$d\boldsymbol{x} = \omega^i \boldsymbol{e}_i \tag{4.6}$$

则

$$ds^2=(d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x})=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2 \qquad (4.7)$$

因为(4.4)是正定二次形式，所以 ω^1，ω^2，…，ω^n 是线性无关的。再取单位向量 $\boldsymbol{e}_{n+1}$ 使得 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}_{n+1}$ 一道作成E_{n+1}的标准正交基。

在这里设指标

$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$r,\ s,\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n+1$$

再令

$$d\boldsymbol{e}_r=\omega_r{}^s\boldsymbol{e}_s \qquad (4.8)$$

则

$$\omega_r{}^s=-\omega_s{}^r \qquad (4.9)$$

结构方程

$$d\omega^r=\omega^s\wedge\omega_s{}^r,\ d\omega_r{}^s=\omega_r{}^t\wedge\omega_t{}^s \qquad (4.10)$$

和以前一样也成立。

从(4.6)可见

$$\omega^{n+1}=0 \qquad (4.11)$$

故从(4.9)，(4.10)得

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i,\ \omega_j{}^i=-\omega_i{}^j \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

这说明$(\omega_i{}^j)$是关于超曲面的诱导黎曼度量（4.7）的黎曼联络形式。

再从（4.11)，(4.10）得

$$0=d\omega^{n+1}=\omega^i\wedge\omega_i{}^{n+1} \qquad (4.12)$$

因为 ω^1，ω^2，…，ω^n 线性无关，故可令

$$\omega_i{}^{n+1}=a_{ij}\omega^j \qquad (4.13)$$

将此形式代入(4.12)里得

$$a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j=0$$

故

$$a_{ij}=a_{ji} \qquad (4.14)$$

在 $\varphi(M)$的切平面上，取标架

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i=p_i{}^j\boldsymbol{e}_j \quad (p_i{}^j)\text{是正交矩阵} \qquad (4.15)$$

代替 $\boldsymbol{e}_1$，…，$\boldsymbol{e}_n$，则相对应的 $\overline{\omega}^i$，$\overline{\omega}_i{}^j$ 满足下列性质。首先从 $d\boldsymbol{x}=\omega^i\boldsymbol{e}_i=\overline{\omega}^i\overline{\boldsymbol{e}}_i$ 得

$$\overline{\omega}^i=p_j{}^i\omega^j$$

又因 $\overline{\boldsymbol{e}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{e}}_n$ 和 $\boldsymbol{e}_{n+1}$ 一道作成标准正交基，故

$$d\boldsymbol{e}_{n+1} = \omega_{n+1}{}^i \boldsymbol{e}_i = \overline{\omega}_{n+1}{}^i \overline{\boldsymbol{e}}_i$$

因此由(4.15)得

$$\omega_{n+1}{}^i = p_j{}^i \overline{\omega}_{n+1}{}^j$$

因 $\omega_{n+1}{}^i = -\omega_i{}^{n+1}$, $\overline{\omega}_{n+1}{}^i = -\overline{\omega}_i{}^{n+1}$, 故

$$\omega_i{}^{n+1} = \sum_j p_j{}^i \overline{\omega}_j{}^{n+1} \tag{4.16}$$

于是令

$$\overline{\omega}_i{}^{n+1} = \overline{a}_{ij} \overline{\omega}^j \tag{4.17}$$

则从(4.13)，(4.16)，(4.17)得

$$a_{ij} = \sum_{k,h} p_k{}^i p_h{}^j \overline{a}_{kh}$$

由二次形（或对称矩阵）的理论知，如果适当地选取正交矩阵 $(p_j{}^i)$ 可使

当 $i \neq j$ 时，$\qquad \overline{a}_{ij} = 0$

于是令

$$\overline{a}_{ii} = k_i$$

则 $\qquad \overline{\omega}_i{}^{n+1} = k_i \omega^i$ （右边不关于 i 相加） $\qquad$ (4.18)

称 $k_1, \cdots, k_n$ 为超曲面在点 $\boldsymbol{x}$ 的**主曲率**。

欧氏空间 E_{n+1} 的结构方程是

$$d\omega_j{}^i = \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i + \omega_j{}^{n+1} \wedge \omega_{n+1}{}^i = \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i - \omega_j{}^{n+1} \wedge \omega_i{}^{n+1}$$

故由(4.18)得

$$\Theta_j{}^i = d\omega_j{}^i - \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i = k_i k_j \omega^i \wedge \omega^j \tag{4.19}$$

（右边不关于 i, j 相加）

这是把超曲面看做黎曼空间时曲率的表达式。

超球面 做为超曲面的例，考虑超球面 S。这是在 E_{n+1} 里到定点 O 的距离是一定的点的轨迹。这时，映射 (4.1) 的样子和二维情况 p.108 里讨论的一样。设 S 上任意点的位置向量为 $\boldsymbol{x}$，取上面用过的正交标架，则

$$d\boldsymbol{x} = \omega^i \boldsymbol{e}_i \tag{4.20}$$

又因 $\boldsymbol{e}_{n+1}$ 为单位法向量，故取它指向外侧，则 $\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e}_{n+1}$ 是球心。故

$$d(\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{e}_{n+1}) = 0, \quad d\boldsymbol{x} = a d\boldsymbol{e}_{n+1}$$

运用(4.20)与 $d\boldsymbol{e}_{n+1} = \omega_{n+1}{}^i \boldsymbol{e}_i$，则

$$\omega^i = a\omega_{n+1}{}^i$$

故

$$\omega_i{}^{n+1} = -\frac{1}{a}\omega^i$$

因此在超球面上主曲率 k_i 全是 $-1/a$，在这种情况下，(4.19)是

$$\Theta_j{}^i = \frac{1}{a^2}\omega^i \wedge \omega^j \tag{4.21}$$

总之，这时关于正交标架，曲率微分形式变为

$$\Theta_j{}^i = K\omega^i \wedge \omega^j \tag{4.22}$$

式中 $K = \dfrac{1}{a^2} > 0$.

一般来说，设K是常数，曲率微分形式可以表示为(4.22)的黎曼空间称为**常曲率黎曼空间**，随着K为正、负，称曲率为正或为负。

因为

$$\Theta_j{}^i = \frac{1}{2}R^i{}_{jkh}\omega^k \wedge \omega^h, \text{故}$$

$$R^i{}_{jkh} = K(\delta_{ik}\delta_{jh} - \delta_{ih}\delta_{jk}) \tag{4.23}$$

因为是在正交标架下讨论的，故此式也可写做

$$R_{ijkh} = K(\delta_{ik}\delta_{jh} - \delta_{ih}\delta_{jk}) \tag{4.24}$$

若不是正交标架，而是 $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ 时

$$R_{ijkh} = K(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}) \tag{4.25}$$

常曲率黎曼空间 欧氏空间是曲率为 0 的黎曼空间，超球面是正常曲率黎曼空间。以下用 *p*.81 二维情况下讨论的方法制作正与负的常曲率黎曼空间。

在 $n+1$ 维向量空间里，设向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的分量为$(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$，$(y^1, y^2, \cdots, y^{n+1})$，则由

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^ny^n + (1/c)x^{n+1}y^{n+1}$ （c是常数）
定义 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$。规定原点，满足

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \frac{1}{c} \tag{4.26}$$

的点 $\boldsymbol{x}$ 的轨迹作成的超曲面称为**伪球**（pseudo-sphere）. 这时考虑在线性变换

$$(x^i)' = \sum_{j=1}^{n} p_i{}^j x^j \quad (i = 1, 2, \cdots, n+1) \tag{4.27}$$

下不改变$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$的，即满足

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle \tag{4.28}$$

的变换将伪球(4.26)变为它自己. 即此变换引起伪球上的位移. 此种位移全体作成群，设此群为G，则和 p.82 定理 3.8 一样可证：

存在G的变换将伪球上的任意点变为其他任意点.

今取

$$\text{点}\ \boldsymbol{x}^0 = (0, 0, \cdots, 0, 1)$$

$$\text{向量}\ \boldsymbol{e}_1{}^0 = (1, 0, \cdots, 0),\ \boldsymbol{e}_2^0 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,$$

$$\boldsymbol{e}_n^0 = (0, 0, \cdots, 1, 0)$$

假设将此点变为点 $\boldsymbol{x}$ 的G的变换将这些向量变为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，因$\langle \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{e}_i{}^0 \rangle = 0$，$\langle \boldsymbol{e}_i{}^0, \boldsymbol{e}_j{}^0 \rangle = \delta_{ij}$，又因满足（4.28）的变换一般保持$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$不变.（参照习题四第 5 题），故

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{4.29}$$

现在在伪球上各点 $\boldsymbol{x}$，考虑这样引进来的 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. 这样 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的选法并非唯一，施行正交变换得到的 $\overline{\boldsymbol{e}}_i = \sum_j p_{ij}\boldsymbol{e}_j$也有相同性质.

今设在各点 $\boldsymbol{x}$ 决定的一组 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，关于决定点 $\boldsymbol{x}$ 的变数（例如 $x^1, x^2, \cdots, x^n$）是可微的（象定理 3.8 那样考虑从 $\boldsymbol{x}^0$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的位移，可见这样假设是可能的）. 因 $\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{e}_1^0, \cdots, \boldsymbol{e}_n^0$ 线性无关，故 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 亦同. 从而可令

$$d\boldsymbol{x}=\omega^i\boldsymbol{e}_i+\omega^{n+1}\boldsymbol{x},\quad d\boldsymbol{e}_i=\omega_i{}^j\boldsymbol{e}_j+\omega_i{}^{n+1}\boldsymbol{x} \tag{4.30}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

由(4.26)，(4.29)可见

$$\langle\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x}\rangle=0,\quad \langle d\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_i\rangle+\langle\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{e}_i\rangle=0$$

$$\langle d\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j\rangle+\langle\boldsymbol{e}_i,\ d\boldsymbol{e}_j\rangle=0$$

将(4.30)代入之，并参照(4.29)，则

$$\omega^{n+1}=0,\quad \omega_i{}^{n+1}=-c\omega^i,\quad \omega_i{}^j=-\omega_j{}^i \tag{4.31}$$

故(4.30)的第一式变为

$$d\boldsymbol{x}=\omega^i\boldsymbol{e}_i \tag{4.32}$$

可见 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 张成切平面。

今设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_{n+1}$，$\omega^i=\omega^i{}_{n+1}$，则关于 $n+1$ 维仿射空间的标架的结构方程是

$$d\omega^i=d\omega_{n+1}{}^i=\omega_{n+1}{}^j\wedge\omega_j{}^i+\omega_{n+1}{}^{n+1}\wedge\omega_{n+1}{}^i \tag{4.33}$$

$$d\omega_j{}^i=\omega_j{}^k\wedge\omega_k{}^i+\omega_j{}^{n+1}\wedge\omega_{n+1}{}^i\quad (i,\ j,\ k=1,\cdots,n) \tag{4.34}$$

故由 $\omega_{n+1}{}^{n+1}=\omega^{n+1}=0$，$\omega_{n+1}{}^i=\omega^i$ 以及(4.33)得

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i \tag{4.35}$$

$$d\omega_j{}^i=\omega_j{}^k\wedge\omega_k{}^i+c\omega^i\wedge\omega^j \tag{4.36}$$

因此，在此伪球(4.26)上，设黎曼度量由

$$ds^2=\langle d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x}\rangle \tag{4.37}$$

给定时，则由(4.32)，(4.29)得

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

再由(4.35)，(4.31)知，$(\omega_j{}^i)$是黎曼联络形式，故由(4.36)得其曲率

$$\Theta_j{}^i=d\omega_j{}^i-\omega_j{}^k\wedge\omega_k{}^i=c\omega^i\wedge\omega^j$$

于是得

定理 6.6 在伪球(4.26)上，按(4.37)导入的黎曼度量是常曲率的。

现在，设仿射空间的点(0，0，…0，-1)与点 $\boldsymbol{x}$ 的连结直线与超

平面 $x^{n+1}=1$ 的交点坐标为$(X^1, X^2, \cdots, X^n, 1)$则得

$$x^1=\lambda X^1, \cdots, x^n=\lambda X^n, x^{n+1}=2\lambda-1$$

式中 $\lambda=\left[1+\frac{c}{4}((X^1)^2+\cdots+(X^n)^2\right]^{-1}$

由此式得

$$ds^2=\frac{(dX^1)^2+(dX^2)^2+\cdots+(dX^n)^2}{[1+(c/4)((X^1)^2+(X^2)^2+\cdots+(X^n)^2]^2}$$

如果在超曲面 $x^{n+1}=1$ 上给定这种度量，可得非欧空间，这和二维情况(*p*. 83)一样。

以下讨论定理 6.5 之逆，即常曲率黎曼空间是否只有方才得到的这种。曲率为 0 的已在定理 6.5 里讨论完，因此下面探讨曲率不是 0 的。

在常曲率黎曼空间里，取局部正交标架，将线素表示为

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

的形状，设其联络微分形式为$(\omega_j{}^i)$，则

$$\Theta_j{}^i=d\omega_j{}^i-\omega_j{}^k\wedge\omega_k{}^i=c\omega^i\wedge\omega^j$$

今取未知向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$，作微分方程

$$d\boldsymbol{x}=\omega^i\boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i=\omega_i{}^j\boldsymbol{e}_j-c\omega^i\boldsymbol{x} \tag{4.38}$$

令 $\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_{n+1}, \quad \omega^i=\omega_{n+1}{}^i, \quad \omega_{n+1}{}^{n+1}=0, \quad \omega_i{}^{n+1}=-c\omega^i$

则结构方程成立，(4.38)完全可积。因此，一开始在某处在初始条件

$$\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle=1/c, \quad \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i\rangle=0, \quad \langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=\delta_{ij}$$

下解(4.38)，则和 *p*.69 一样讨论知这样关系恒成立。故得

$$\langle d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}\rangle=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2=ds^2,$$

即局部地此常曲率空间与伪球上所作黎曼空间一致。因此得

定理 6.7 常曲率空间局部地与伪球(4.26)上由(4.37)定义黎曼度量的黎曼空间等距。

习 题 六

1 设从三维欧氏空间的球面 $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=a^2$ 去掉点 $x^3=\pm a$ 而得黎曼空间为 M_2。在 M_2 与数直线 $L(-\infty<u<\infty)$ 的直积空间 $M=M_2\times L$ 上引进黎曼度量（k 是常数）如下。

$$ds=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2$$
$$+\left(du-\frac{kx^3(x^1dx^2-x^2dx^1)}{a((x^1)^2+(x^2)^2)}\right)^2$$

若在 M_2 上取球坐标$(a,\ \theta,\ \varphi)$，则此黎曼度量变为

$$ds^2=a^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+(du-k\cos\theta d\varphi)^2$$

就此度量，

(1) 绕 x^3 轴旋转球面和平移 L 在 M 中引起等距映射。试证明之。

(2) 对应于球面绕原点的任何旋转，在M中有局部等距映射。试证明之。

(3) 对于对偶空间里的基底 $\omega^1=ad\theta$，$\omega^2=a\sin\theta d\varphi$，$\omega^3=du-k\cos\theta d\varphi$，黎曼联络形式是

$$\omega_1{}^2=-\omega_2{}^1=\frac{k}{2a^2}(du-k\cos\theta d\varphi)+\cos\theta d\varphi$$

$$\omega_1{}^3=-\omega_3{}^1=\frac{k}{2a}\sin\theta d\varphi,\quad \omega_2{}^3=-\frac{k}{2a}d\theta$$

试证明之。

(4) 关于(3)的正交标架，试求黎曼曲率张量。

(5) 在什么情况下，此黎曼空间为常曲率的？

2 在常曲率黎曼空间里，试证曲率张量为平行张量场。又问在前题的黎曼空间里怎样？

3 有 $n-1$ 维黎曼空间 M_{n-1} 与数直线 L 的直积空间 $M=M_{n-1}\times L$，M_{n-1} 的黎曼度量在局部坐标下是

$$ds_0^2=g_{\alpha\beta}(x^1,x^2,\cdots,x^{n-1})dx^\alpha dx^\beta\ \ (\alpha,\beta=1,2,\cdots,n-1)$$

当L里的坐标是t时，设M的黎曼度量是

$$ds^2 = ds_0^2 + dt^2$$

在此黎曼里间里，沿其上的曲线展开之，问有什么结论？

4 在前题里，当 ds^2 由

$$ds^2 = t^2 ds_0^2 + dt^2$$

给定时，在展开之际切空间的某一点总做为固定点出现．试证明之．

5 从黎曼空间的一点 p 向任意方向引测地线，设沿此线从点 p 量的弧长等于一定值 r 的点的轨迹为 S_r，则在 r 值不太大范围里，S_r 为超曲面．此曲面与一开始引的所有测地线正交．试证明之．

第七章　黎曼空间的诸问题

到目前为止，我们阐述了黎曼空间的几个基本概念。但是人们已把黎曼空间研究得非常细致，得到了许多优美结果。要想详细叙述，以前的准备知识是不够的，而本书的目标也没放那样高。但是尽管不充分，如能窥视这样内容的一部分也是有意义的。因此我想讲几个题目。在这里证明当然作不到，讲的基本概念也是粗线条。

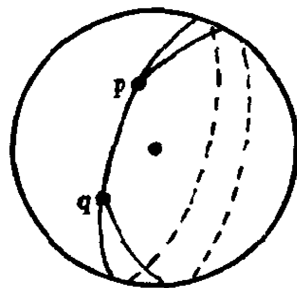
§1　测　地　线

关于黎曼空间的测地线，以前讲了两个性质。

（1）展开之变为直线。

（2）对于线上任意充分接近二点，连结此二点的各种曲线中，此线的弧长最短。

性质（2）是局部的，整体地并不成立。例如球面上的大圆都是测地线（参照 p.73）。而且对于大圆上二点 p，q，劣弧是连结 p，q 的最短线。其实，这时，劣弧 pq 的长度最短，而在离优弧 pq 极近的曲线 pq 中有比优弧短的。



第 7.1 图

一般地说在测地线 c 上有二点 p,q 可使从 p 到 q 的弧长比连结 p,q 的任意曲线弧（与测地线充分接近）短。固定 p 考虑之，在这样 q 中离 p 最远的点称为 p 的**共轭点**（详细说是第一共轭点）。例如，就球面的情况而言，点 p 的共轭点是关于球心对称于 p 的点。

有时共轭点并不存在。例如在欧氏空间里测地线是直线，但线上任何点都没有共轭点。

还有，测地线不一定能无限延长。例如，从球面去掉一点A而得的面可看做黎曼空间，通过A的大圆（当然A除外）是测地线，到A就过不去了，所以不能说测地线可无限延长。

一般在连通黎曼空间M里，不论哪一条测地线都可以任意延长（变成闭曲线也行）时，称M为**测地完备**（geodesically complete）。在此空间中，下列基本性质成立。

对于黎曼空间 M 的二点 p，q，连结此二点的任意分段可微分曲线，其长的下确界称为 p，q 的**距离**，记以 $d(p,q)$。这样一来，

$d(p,q)=d(q,p)\geqslant 0$，只有当 $p=q$ 时等号成立。

$$d(p,q)+d(q,r)\geqslant d(p,r)$$

成立，M 变成度量空间（metric space）。一般地在度量空间里，有点列 $p_1,p_2,\cdots\cdots$，当

若$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d(p_m,p_n)=0$， 则此点列有聚点

时，称此空间是**完备**的（complete）。这时有

定理 7.1 在连通黎曼空间里下列三条件等价。

（1）是测地完备的，

（2）做为度量空间是完备的，

（3）任意有界无穷集具有聚点。

由此性质得

定理 7.2 紧致空间是完备的。

又可导出下列

定理 7.3 在完备黎曼空间里，连结其任意二点的曲线中有长度最短的测地线。

这样，若有完备性质，则从多方面看容易处理，故在整体黎曼空间的研究上是最重要的基本概念。

§2 和乐群

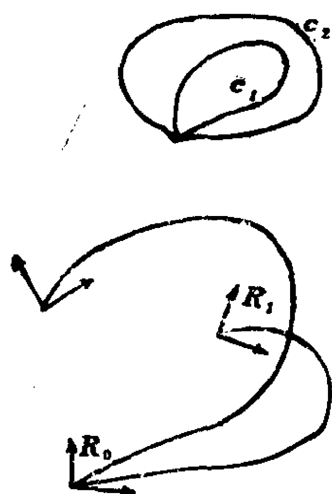
在这里假设黎曼空间M是 n 维而且连通。故M上任意二点可用曲

线连结。现在考虑从M上任意点 p 出发再返回来的曲线 c，沿此曲线将切空间展开在欧氏空间 E_n 中。这样一来，在起点p处的切空间 T_p 在 E_n 内的位置与一圈后的 T_p 在 E_n 内的位置一般并不同。在 T_p 里取确定的正交标架R，在 E_n 里设它的最初位置为 R_0：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，展开一圈后设 R 的位置为 R_1：$\boldsymbol{x}', \boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ 则

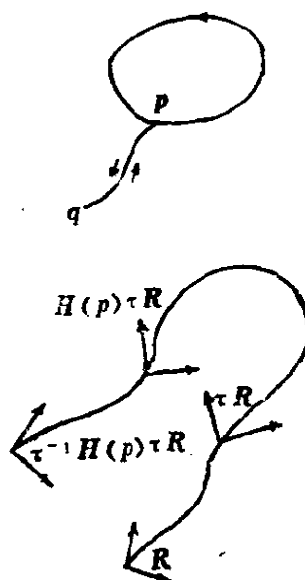
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + a^i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}'_i = p_i{}^j \boldsymbol{e}_j$$

（$(p_i{}^j)$ 是正交矩阵）

此位移只依赖于 T_p，而与其中选取的标架以及 R_0 的取法无关，这从展开的意义看显然。记此位移为 σ_c。这时下列性质成立。



第 7.2 图



第 7.3 图

（1）c 的反向路径对应于位移 σ_c 的逆 σ_c^{-1}。

（2）对于以点 p 为基点的二闭路c, c'，设相对应的位移为 $\sigma_c, \sigma_{c'}$，则对于在 c 后连结 c' 的路径，相对应的是在 σ_c 后再作 $\sigma_{c'}$ 的位移 $\sigma_c \sigma_{c'}$。

由这些性质可见，以点 p 为基点的闭曲线c全体所对应的 σ_c 作成 E_n 的位移群，称之为在点 p 处的**和乐群**（holonomy group），记以 $H(p)$。而只考虑其回转部分也作成群，称之为在点 p 处的**齐性和乐群**（homogeneous holonomy group），记以 $H^0(p)$。有时限

制闭曲线在M上可收缩于一点。

以下取点 q 代替点 p，因M连通，故可证

$$H(q)=\tau^{-1}H(p)\tau,\quad H_0(q)=\tau_0^{-1}H_0(p)\tau_0$$

式中的 τ，τ_0 是沿从点 q 到点 p 的曲线展开而产生的位移。故 $H(p)$与 $H(q)$，$H_0(p)$与 $H_0(q)$本质上是相同的群，称之为黎曼空间的**和乐群**。

其次举和乐群的应用例。

黎曼空间的分解 今有二黎曼空间 M_1，M_2，设M为其直积空间。在 M_1 里考虑局部坐标 x^1，$x^2,\cdots,x^k$，在 M_2 里考虑局部坐标 x^{k+1}，$x^{k+2},\cdots,x^n$。设线素分别为

$$ds_1^2=g_{\alpha\beta}(x^1,x^2,\cdots,x^k)dx^\alpha dx^\beta$$

$$ds_2^2=g_{\lambda\mu}(x^{k+1},x^{k+2},\cdots,x^n)dx^\lambda x^\mu$$

$$(\alpha,\beta=1,2,\cdots,k;\quad \lambda,\mu=k+1,k+2,\cdots,n)$$

在 $M=M_1\times M_2$ 里考虑局部坐标 $x^1,x^2,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^n$，在 M 上定义线素

$$ds^2=ds_1^2+ds_2^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta+g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$$

时，M是二黎曼空间 M_1，M_2 的直积。现在于 M_1 上取正交标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$，在 M_2 上取正交标架 $\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$，设

$$ds_1^2=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^k)^2,\quad ds_2^2=(\omega^{k+1})^2+\cdots+(\omega^n)^2 \tag{2.1}$$

并设它们的黎曼联络微分形式分别为$(\omega_\beta{}^\alpha)$，$(\omega_\mu{}^\lambda)$，则得

$$\omega_\beta{}^\alpha=\Gamma_\beta{}^\alpha{}_\gamma(x^1,\cdots,x^k)dx^\gamma\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots k) \tag{2.2}$$

$$\omega_\mu{}^\lambda=\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu(x^{k+1},\cdots,x^n)dx^\nu(\lambda,\mu,\nu=k+1,k+2,\cdots,n) \tag{2.3}$$

于是在 M 的切空间上取 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为标架，则得

$$ds^2=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^k)^2+(\omega^{k+1})^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

又除了(2.2)，(2.3)之外，添上

$$\omega_\lambda{}^\alpha=-\omega_\alpha{}^\lambda=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,k;\ \lambda=k+1,\cdots,n),$$

则 $\omega_j{}^i(i,j=1,2,\cdots,n)$是 M 关于 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 的黎曼联络微分形式。现在考虑M的展开式，则

$$d\boldsymbol{e}_\alpha=\omega_\alpha{}^\beta\boldsymbol{e}_\beta,\quad d\boldsymbol{e}_\lambda=\omega_\lambda{}^\mu\boldsymbol{e}_\mu$$

沿M的曲线 $p=p(t)$将此黎曼空间展开之，则关于初始条件 $\boldsymbol{e}_1{}^0,\cdots,\boldsymbol{e}_k{}^0,\boldsymbol{e}_{k+1}{}^0,\cdots,\boldsymbol{e}_n{}^0$ 得

$$\boldsymbol{e}_\alpha=p_\alpha{}^\beta\boldsymbol{e}_\beta{}^0,\quad \boldsymbol{e}_\lambda=p_\lambda{}^\mu\boldsymbol{e}_\mu{}^0,$$

由 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_k$ 张成的 k 维平面（记以 L_k）同它自己平行．由 $\boldsymbol{e}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 张成的 $n-k$ 维平面（记以 L_{n-k}）也一样。

故沿从一点 p 出发再回到这点的曲线，将此黎曼空间展开在欧氏空间中时，平面 L_k，L_{n-k} 来到与开始位置相平行之处。称此性质为和乐群保持 L_k,L_{n-k} 的方向不变。即

定理 7.4 在二黎曼空间的直积黎曼空间里，齐性和乐群使切空间的某子空间保持平行。

即齐性和乐群是可约的。

几个黎曼空间的直积黎曼空间也具有这种性质。

当黎曼空间不能分解为二黎曼空间的直积时，称为**既约**的(irreducible)。这样通过齐次和乐群的考察知下列基本定理。

定理 7.5 连通，单连通，完备的黎曼空间M可直积分解为

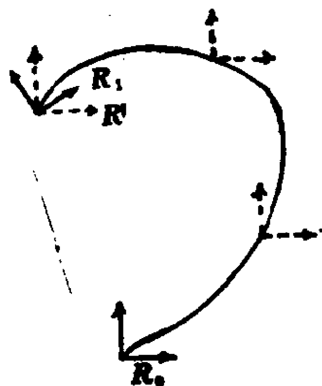
$$M=M_0\times M_1\times\cdots\times M_k$$

其中，M_0 是欧氏空间（有时没有），M_1，$M_2,\cdots,M_k$ 是单连通，完备，既约黎曼空间。

又此分解是唯一的。

这里所说**单连通**(simply connected)的意思是这个空间的闭曲线全可连续地收缩于一点．例如对曲面而言，球面是单连通，圆环面就不是。

假设在黎曼空间里有平行张量场，以 t 记之．可设 t 是一般(r,s)型张量．这时，考虑从点 p 出发再返回此处的闭曲线 c，沿此曲线将切空间展开在欧氏空间中，则得在 T_p 里取的正交标架 R 的开始位置 R_0 以及沿 c 转一圈后的标架 R_1。今沿曲线 c 将 p 处的 R 平移得 R'，因张量 t 作



第 7.4 图

成平行场，故其分量一定。这个标架在 E_n 里的展开，设转一圈后的位置为 R'，则 t 关于 R_1，R' 的分量相同。因此下列性质成立。

定理 7.6 当黎曼空间里有平行张量场时，则齐性和乐群保持此张量不变。

齐性和乐群 H^0 是 n 维欧氏空间的回转群 $O(n)$或其子群。又只考虑收缩于一点的闭曲线而得受限制的齐性和乐群是正规回转群 $SO(n)$或其子群。当黎曼空间可定向时也是这样。

齐性和乐群是 $SO(n)$ 自己的例有下列

定理 7.7 $n+1$ 维欧氏空间里的闭超曲面的齐性和乐群是 $SO(n)$。

例如球面的情况是这样。

关于和乐群的平移，人们知道下列

定理 7.8 完备而且既约黎曼空间的和乐群包含全部平移。

§3 截面曲率

在 n 维黎曼空间M的一点 p 处的切空间 T_p 里考虑二维子向量空间 L_2。现在，通过点 p，引测地线与 L_2 的切向量相切，则这样的测地线在 p 附近作成二维曲面。设此曲面为 S_2，因为它是二维黎曼空间，故考虑它的高斯曲率。在M上取正交标架，设关于这种标架属于 L_2 的二向量为$(X^1,X^2,\cdots,X^n)$，$(Y^1,Y^2,\cdots,Y^n)$，再令

$$p^{ij}=X^iY^j-X^jY^i$$

$$\sigma^2=\sum_{i,j}(p^{ij})^2$$

则通过计算可导出在点 p 处 S_2 的高斯曲率是

$$-\frac{1}{\sigma^2}R_{ijkh}p^{ik}p^{jh}$$

它和 L_2 内的二向量的取法无关。称此值为黎曼空间 M 在点 p 处的面素 L_2 所决定的**截面曲率**(sectional curvature)。在常曲率空间里

$$R_{ijkh} = -K(\delta_{ik}\delta_{jh} - \delta_{ih}\delta_{jk})$$

故截面曲率总等于一定值。反之，可证下列

定理 7.9 在黎曼空间的各点，若不论怎样取在此点处的二维面素，截面曲率总是一定，则此空间为常曲率空间。

当微分流形上的闭曲线总能收缩于一点时，即单连通时，下列性质成立。

定理 7.10 当单连通而且完备的黎曼空间具有到处为 0 或负截面曲率时，则此空间与欧氏空间同胚。

定理 7.11 当在单连通而且紧致黎曼空间里，对于任意截面曲率

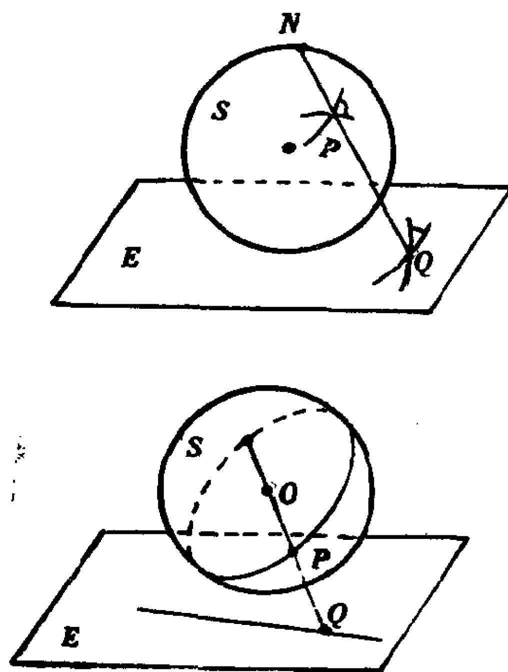
$$\frac{1}{4} < \text{截面曲率} \leqslant 1$$

时，则此空间与球面同胚。

§4 保角映射与射影映射

在三维欧氏空间里考虑球面 S 与平面 E，设 E 不通过 S 的中心。今设与 E 垂直的 S 的直径的一端为 N，则从 N 将 S 上的点 P 变到 E 上的点，将 S 上 N 以外的点映射在 E 上。它（极射影）是保角映射，证明如 p.58 所示。

其次，从 S 的球心 O 将 S 上的点变到 E 上，则 S 上的点除与 E 平行的大圆外都变到 E 上。这时，S 上的二点与 E 上的一点对应，故只考虑半球，则对应是一对一的。在此映射（中心射影）下，S 上的任意大圆弧对应于 E 上的直线。将 S 看做黎曼空间



第 7.5 图

时，大圆是测地线。故此射影

将S的测地线映射到E的测地线上。

一般地说，当二黎曼空间M，$\overline{M}$之间成同胚对应，而且二曲线的夹角不变时，则称为**保角对应**；测地线对应于测地线时，称为**射影对应**。又将此对应看做从M到$\overline{M}$（或从$\overline{M}$到M）的映射时，称为保角映射，射影映射。

当M，$\overline{M}$成同胚对应时，取相同的局部坐标也无妨碍。并设使用正交标架使它们的线素为

$$ds^2=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^n)^2,\quad d\overline{s}^2=(\overline{\omega}^1)^2+\cdots+(\overline{\omega}^n)^2$$

因为ω^i，$\overline{\omega}^i$都是$dx^1,\cdots,dx^n$的一次微分形式，故可令$\overline{\omega}^i=p_j{}^i\omega^j$。而且得

$$d\overline{s}^2=g_{ij}\omega^i\omega^j$$

故$\omega^1,\cdots,\omega^n$也可看做$\overline{M}$上的对偶切空间的基底，它们一般并非正交标架。以下，在$\overline{M}$上使用这种标架考虑问题。

设$(\omega_j{}^i)$为M上关于$\omega^1,\cdots,\omega^n$的黎曼联络微分形式，则

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i,\quad \omega_j{}^i=-\omega_i{}^j$$

又设$(\overline{\omega}_j{}^i)$为$\overline{M}$上关于$\omega^1,\cdots,\omega^n$的黎曼联络微分形式，则

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\overline{\omega}_j{}^i,\quad dg_{ij}=g_{kj}\overline{\omega}_i{}^k+g_{ik}\overline{\omega}_j{}^k \tag{4.1}$$

以下讨论$(\omega_j{}^i)$与$(\overline{\omega}_j{}^i)$的关系。

保角映射的情况，这时，和 $p.55$ 讲的完全一样，

$$d\overline{s}^2=a^2ds^2\qquad (a>0)$$

成立。令

$$l=\log a,\quad dl=l_i\omega^i$$

则

$$\overline{\omega}_j{}^i=\omega_j{}^i+\delta_j{}^idl+l_j\omega^i-l_i\omega^j \tag{4.2}$$

这可通过下述讨论验证。首先，

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j{}^i=\omega^j\wedge(\overline{\omega}_j{}^i-\delta_j{}^idl-l_j\omega^i+l_i\omega^j)=\omega^j\wedge\overline{\omega}_j{}^i$$

这时，又因$g_{ij}=a^2\delta_{ij}$，故

$$dg_{ij}=2ada\cdot\delta_{ij}=2a^2dl\cdot\delta_{ij}$$

$$g_{kj}\overline{\omega}_i{}^k + g_{ik}\overline{\omega}_j{}^k = a^2(\overline{\omega}_i{}^j + \overline{\omega}_j{}^i) = a^2 \cdot 2\delta_j{}^i dl$$

因此

$$dg_{ij} = g_{kj}\overline{\omega}_i{}^k + g_{ik}\overline{\omega}_j{}^k$$

因为(4.1)成立，所以关于 $\omega^1, \cdots, \omega^n$，$(\overline{\omega}_j{}^i)$是$\overline{M}$的黎曼联络微分形式。

射影映射的情况。这时，由下述讨论知

$$\overline{\omega}_j{}^i = \omega_j{}^i + \delta_j{}^i dl + l_j\omega^i \quad (dl = l_i\omega^i) \tag{4.3}$$

首先说，如果此式成立，则为射影映射。原因是，M的测地线方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right) + \frac{\omega^j}{dt}\ \frac{\omega_j{}^i}{dt} = 0 \tag{4.4}$$

这条曲线 $p = p(t)$在$\overline{M}$里的象是

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right) + \frac{\omega^j}{dt}\ \frac{\omega_j{}^i}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right) + \frac{\omega^j}{dt}\left(\frac{\overline{\omega}_j{}^i}{dt} - \delta_j{}^i\frac{dl}{dt} - l_j\ \frac{\omega^i}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right) + \frac{\omega^j}{dt}\ \frac{\overline{\omega}_j{}^i}{dt} - 2\frac{dl}{dt}\ \frac{\omega^i}{dt}
\end{aligned}$$

故得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^i}{dt}\right) + \frac{\omega^j}{dt}\ \frac{\overline{\omega}_j{}^i}{dt} - 2\frac{dl}{dt}\ \frac{\omega^i}{dt} = 0$$

再令 $\bar{t} = \int e^{-2l}dt$，则此式变为

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{\omega^i}{d\bar{t}}\right) + \frac{\omega^j}{d\bar{t}}\ \frac{\overline{\omega}_j{}^i}{d\bar{t}} = 0 \tag{4.5}$$

这是$\overline{M}$里的测地线方程。

反之，因(4.4)变为(4.5)，故在黎曼联络形式之间可导出(4.3)的关系。（证明略）

共形曲率张量与射影曲率张量 M，$\overline{M}$的曲率微分形式是

$$\Theta_j{}^i = d\omega_j{}^i - \omega_j{}^k \wedge \omega_k{}^i = \frac{1}{2} R^i{}_{jkh}\omega^k \wedge \omega^h,$$

$$\overline{\Theta}_j{}^i = d\overline{\omega}_j{}^i - \overline{\omega}_j{}^k \wedge \overline{\omega}_k{}^i = \frac{1}{2}\overline{R}^i{}_{jkh}\omega^k \wedge \omega^h \qquad (4.6)$$

保角映射的情况。将(4.2)代入(4.6)则得 $R^i{}_{jkh}$ 与 $\overline{R}^i{}_{jkh}$ 的关系式。一般地讲，使用 $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ 的曲率张量 $R^i{}_{jkh}$，利齐张量 R_{ij} 以及 $R_j{}^i = g^{ik}R_{kj}$，数量曲率 R，令

$$C^i{}_{jkh} = R^i{}_{jkh} - \frac{1}{n-2}(R_{jk}\delta_h{}^i - R_{jh}\delta_k{}^i + g_{jk}R_h{}^i - g_{jh}R_k{}^i)$$

$$+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jk}\delta_h{}^i - g_{jh}\delta_k{}^i) \qquad (4.7)$$

称之为**共形曲率张量**（conformal curvàture tensor）（保角映射也叫做共形映射）。在M，$\overline{M}$里用相同的标架 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 计算此张量，分别以$C^i{}_{jkh}$，$\overline{C}^i{}_{jkh}$ 表示之，则通过计算可证

$$C^i{}_{jkh} = \overline{C}^i{}_{jkh} \qquad (4.8)$$

在欧氏空间里，曲率张量 $(R^i{}_{jkh})$为 0，从而(R_{ij})，R 也是 0，因此得 $C^i{}_{jkh} = 0$，故在与欧氏空间成保角对应的黎曼空间里，由于(4.8)知共形曲率张量为 0。反之，人们也知道，如果 n 维($n>3$)黎曼空间的共形曲率张量为 0，则此空间与欧氏空间局部成保角映射。

与欧氏空间局部成保角对应的黎曼空间称为**共形平坦的**（conformally flat）。如使用适当的局部坐标，此空间的线素可写做

$ds^2 = a^2((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2)$ （a 是 $x^1,\cdots,x^n$ 的函数）

常曲率空间是共形平坦的（参照 $p.157$）。

在射影映射的情况下将(4.3)代入(4.6)，则得M，$\overline{M}$的曲率张量间的关系式。一般来说，对于 $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$，从曲率张量 $R^i{}_{jkh}$ 作出的张量

$$W^i{}_{jkh} = R^i{}_{jkh} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}\delta_h{}^i - R_{jh}\delta_k{}^i) \qquad (4.9)$$

称为**射影曲率张量**（projective curvature tensor）。今设M，$\overline{M}$的射影曲率张量分别为$W^i{}_{jkh}$，$\overline{W}^i{}_{jkh}$，则当M，$\overline{M}$成射影对应时可导出

$$W^i{}_{jkh}=\overline{W}^i{}_{jkh} \tag{4.10}$$

在欧氏空间里$W^i{}_{jkh}=0$，因此和它成射影对应的黎曼空间里射影曲率张量为0。与欧氏空间局部地成射影对应的空间称为**射影平坦空间**（projectively flat）。

此外，人们尚知

定理 7.12 射影平坦黎曼空间是常曲率空间。

§5 李 导 数

有二个n维微分流形M，N的坐标邻域U,V，设它们的局部坐标分别为$x^1,x^2,\cdots,x^n$以及$y^1,y^2,\cdots,y^n$，今有U与V的C^1级同胚映射f，设此映射由

$$y^i=f^i(x^1,x^2,\cdots,x^n)\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.1}$$

给定。这时，还有

$$x^i=g^i(y^1,y^2,\cdots,y^n) \tag{5.2}$$

故对于U上的一次微分形式$\omega=p_i(x^1,\cdots,x^n)dx^i$有$V$上的一次微分形式

$$p_i(g^1,\cdots,g^n)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j \tag{5.3}$$

与之对应。以$f(\omega)$记之。而对于U上的向量场$X=a^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i}$有

$$a^i(g^1,\cdots,g^n)\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{5.4}$$

与之对应。以$f(X)$记之。

一次微分形式ω就是共变向量场，线性算子X就是反变向量场。

推广以上想法，也可一样考虑一般张量场。例如，对于(1,1)型张量 $T=(t_j{}^i)$ 来讲，在自然标架下是

$$T=t_j{}^i\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j. \tag{5.5}$$

在映射(5.1)下得

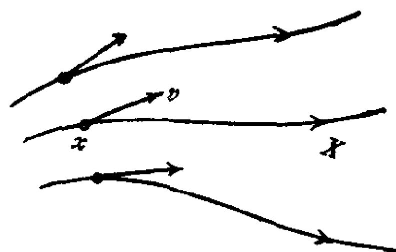
$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k},\quad dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial y^h}dy^h$$

故对于(5.5)，有

$$t_j{}^i\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial y^h}\frac{\partial}{\partial y^k}\otimes dy^h \tag{5.6}$$

与之对应。以 $f(T)$ 记之。

单参数变换群 在一微分流形 M 的坐标邻域里假设给定向量场 $v=(v^i)$。设局部坐标为 $x^1,x^2,\cdots,x^n$，关于自然标架 v 的分量为 $v^1,v^2,\cdots,v^n$。在这里 $v^i(x^1,\cdots,x^n)$ 记以 $v^i(x)$。设微分方程



第 7.6 图

$$\frac{dX^i}{dt}=v^i(X)\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{5.7}$$

在初始条件

当 $t=0$ 时，$X^i=x^i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

下的解为

$$X^i=f^i(t,x)=f^i(t;x^1,\cdots,x^n) \tag{5.8}$$

这时，根据以下讨论知

$$f^i(s+t,x)=f^i(s,f(t,x)) \tag{5.9}$$

左边的函数满足

$$\frac{d}{ds}f^i(s+t,x)=\frac{d}{d(s+t)}f^i(s+t,x)=v^i(f(s+t,x))$$

$$\text{当}s=0\text{时，}f^i(s+t,x)=f^i(t,x)$$

右边的函数满足

$$\frac{d}{ds}f^i(s,f(t,x))=v^i(f(s,f(t,x)))$$

当 $s=0$ 时，$f^i(s,f(t,x))=f^i(0,f(t,x))=f^i(t,x)$

即 $f^i(s+t,x)$与 $f^i(s,f(t,x))$满足相同的微分方程与相同的初始条件，故相等。

根据(5.9)与 $f^i(0,x)=x^i$ 知，由（5.8）表示的从 $x^1,\cdots,x^n$ 到 $X^1,\cdots,X^n$ 的变换在 $t=0$ 的附近具有以 t 为参数的群性质。称之为**局部变换群**。

假设记 $f_t(x)=f(t,x)$，则得

$$f_0(x)=x,\quad f_s(f_t(x))=f_{s+t}(x)$$

李导数 （Lie derivative）其次考虑以向量场 v 为基础求张量场 T 的导数。如上所述，由 v 决定局部变换群。现在考虑在 $X=f_t(x)$的反变换 $x=f_{-t}(X)$下，将点 X 处的张量场 $T(X)$根据(5.8)变为点 x 处的 $f_{-t}(T(X))$，由

$$\mathscr{L}_v(T)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f_{-t}(T(X))-T(x)) \qquad (5.10)$$

定义 x 处 T 的**李导数**。

例 1 对于函数 $\varphi=\varphi(x)$，$\mathscr{L}_v(\varphi)$ 如下所示。首先，从(5.7)，(5.8)可见，

$$X^i=x^i+tv^i(x)+o(t) \qquad (5.11)$$

$$f_{-t}(\varphi(X))=\varphi(x+tv+o(t))=\varphi(x)+tv^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}+o(t)$$

故得

$$\mathscr{L}_v(\varphi)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f_{-t}(\varphi(X))-\varphi(x))=v^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

例 2 对于反变向量 $u=(u^i)$，讨论如下。

首先，由(5.11)得

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j}=\delta_j+t\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+o(t) \quad 故 \quad \frac{\partial x^i}{\partial X^j}=\delta_j^i-t\frac{\partial v^i}{\partial x_j}+o(t)$$

因此

$$u^i(X)\frac{\partial}{\partial X^i}=u^j(x+tv+o(t))\ \frac{\partial x^i}{\partial X^j}\ \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$=(u^j(x)+tv^k\frac{\partial u^j}{\partial x^k}+o(t))\ (\delta_j{}^i-t\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+o(t))\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$=\left(u^i(x)+t(v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}-u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j})+o(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

故得

$$\mathscr{L}_v\left(u^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\left(v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}-u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (5.12)$$

令 $U=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $V=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，则此结果可写成

$$\mathscr{L}_v(U)=VU-UV$$

此处 $VU-UV$ 普通写做$[V, U]$。

例 3 对于共变向量 $w=(w_i)$,

$$w_i(X)dX^i=w_i(x+tv+o(t))d(x^i+tv^i+o(t))$$

$$=\left(w_i(x)+tv^j\frac{\partial w_i}{\partial x^j}+o(t)\right)\left(dx^i+t\frac{\partial v^i}{\partial x^j}dx^j+o(t)\right)$$

$$=\left(w_i(x)+t\left(v^j\frac{\partial w_i}{\partial x^j}+w_j\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)+o(t)\right)dx^i$$

由此得

$$\mathscr{L}_v(w_idx^i)=\left(v^j\frac{\partial w_i}{\partial x^j}+w_j\frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right)dx^i$$

用例 1，2，3 里所述方法可计算一般张量场的李导数。

黎曼空间里的李导数 在黎曼空间里导入黎曼联络，由此可定义张量的共变导数如前所述。运用这种导数则(5.12)变为

$$\mathscr{L}_v\left(u^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=(v^j\nabla_ju^i-u^j\nabla_jv^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

这从

$$\nabla_j u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma_j{}^i{}_k u^k, \quad \nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma_j{}^i{}_k v^k, \quad \Gamma_j{}^i{}_k = \Gamma_k{}^i{}_j$$

显然。同理得

$$\mathscr{L}_v(w_i dx^i) = (v^j \nabla_j w_i + w_j \nabla_i v^j) dx^i$$

再者，对于共变张量场(a_{ij})，

$$\mathscr{L}_v(a_{ij} dx^i \otimes dx^j) = (v^k \nabla_k a_{ij} + a_{ik} \nabla_j v^k + a_{kj} \nabla_i v^k) dx^i \otimes dx^j$$

特别当 $g = (g_{ij})$为黎曼空间的基本张量时，有

$$\mathscr{L}_v(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = (g_{ik} \nabla_j v^k + g_{kj} \nabla_i v^k) dx^i \otimes dx^j$$

当向量场 v 的生成局部变换群是等距变换群时，则 v 称为**开玲**（Killing)**向量场**。因

$$g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j = g_{ij}(X) dX^i \otimes dX^j$$

故由李导数的定义得

$$\mathscr{L}_v(g_{ij} dx^i \otimes dx^j) = 0$$

即

$$g_{ik} \nabla_j v^k + g_{kj} \nabla_i v^k = 0$$

于是令 $v_{ij} = g_{ik} \nabla_j v^k$ 则

$$v_{ij} = -v_{ji}$$

即开玲向量场满足此条件。

在研究黎曼空间的等距变换群时，考察开玲向量场是不可少的。

§6 齐性空间与对称空间

对于黎曼空间M的任意二点 p, q，如果存在M的等距变换将 p 映为 q，则称M为**齐性**的(homogeneous)。这是因为，对于任意二点 p，q，它们的邻域做为黎曼空间具有相同结构．在这种意义下是齐性的。

例 1 欧氏空间是齐性的。

例 2 三维欧氏空间的球面做为二维黎曼空间是齐性的。原因是，在绕球心的回转下，球面与球面重迭，而且任意点可变为任意点。

例 3 正圆柱面在绕轴回转与沿轴向平移下重迭在自己之上，而且其上任意点 p 变为任意点 q，因此是齐性的。相反，正圆锥面不是齐性的。

例 4 在欧氏空间里，将正方形

$$0\leqslant x^1\leqslant 1,\ 0\leqslant x^2\leqslant 1$$

的对边同向相贴而成二维流形M上引进黎曼度量

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2$$

这时，由

$$(x^1)'\equiv x^1+a^1,\ (x^2)'\equiv x^2+a^2(\bmod\ 1)$$

决定的变换 $(x^1,x^2)\to((x^1)',(x^2)')$ 是等距变换。存在这样的变换将一点变到M的任意点，故M是齐性空间。

例 5 设 S_1 为圆，S_2 为二维球面（三维欧氏空间的球面），把它们看做黎曼空间，作它们的直积黎曼空间 $M=S_1\times S_2$。根据圆 S_1 的回转 σ_1 与球面 S_2 的回转 σ_2 而成M的等距变换，M是齐性空间。能够证明此空间的等距变换只有用 σ_1 与 σ_2 作成的。

在齐性黎曼空间里，从群的定义立即可见，等距变换全体作成群。

例 1,2 的齐性空间与例 3，4，5 的齐性空间有显著区别。那就是，在这些空间的等距变换群中考虑固定一点者，由此在 p 的切空间中引起的回转（其正确定义在这里从略）是

在例 1,2 里是所有的回转，

在例 3 里是 180° 的回转，在例 4 里是 90°，180° 的回转，

在例 5 里是绕一轴的回转。

一般在齐性空间里固定一点的等距变换全体作成的群称为**迷向群**（Group of Isotropy）。它在切空间里引起的回转群称为**线性迷向群**。这时成立下列

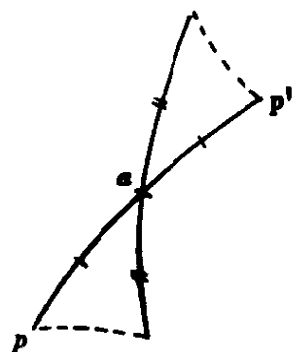
定理 7.13 当线性迷向性是由绕一点的所有回转而成的群时，则此空间是常曲率的。

当线性迷向群是由回转全体而成时，称此齐性黎曼空间具有**自**

由运动性（Free mobility）。也可以说是**齐性迷向性**。上列定理说明，具有这样性质的空间是常曲率的。但其逆不真。其实，例 3，4 虽是常曲率空间，但不具备自由运动性。

非欧平面（$p.83$）与非欧空间（$p.160$）具有自由运动性。这些空间的重要性之一就在这里。

对称黎曼空间（symmetric Riemmannian space）在欧氏平面与欧氏空间里，关于任意点的对称是等距变换。又在球面上，关于任意点 a，在通过它的任意测地线（大圆）上，在 a 的两侧取二点 p, p' 到 a 等距，对于 p 以 p' 对应之，则此对应是等距映射。



第 7.7 图

一般若关于黎曼空间的各点在局部意义下给定这样等距变换时，称此空间为**局部对称黎曼空间**。于是成立下列

定理 7.14 在局部对称黎曼空间里，曲率张量作成平行张量场。即曲率张量的共变导数为 0。

又整体对称黎曼空间的定义是：有黎曼空间M，对于其任意点 a 如果存在以 a 为弧立固定点的等距变换 σ_a 而且$(\sigma_a)^2$ 是恒等变换（不改变任何点的变换），则称M为**对称黎曼空间**。

这种整体意义的对称空间是如下所述的局部对称空间。今对于 $p\in \mathrm{M}$，设 $\sigma_a(p)=p'$，则由 $\sigma_a(\sigma_a(p))=p$ 得 $\sigma_a(p')=p$。当 p 在 a 附近时，p' 也在 a 的附近，连结二点 p，p' 的测地线弧在 σ_a 下不变。故其中点是固定点，但在 a 的附近只有 a 是固定点，故此点是 a。故在 a 的附近讨论的话，则 σ_a 在通过 a 的测地线上对应于二点，此二点在 a 的两侧并且到 a 的距离相等。因 σ_a 是等距变换，故M为局部对称黎曼空间。

欧氏空间以及 $n+1$ 维欧氏空间中的球面是对称黎曼空间。但取其一部分而成的黎曼空间局部地虽是对称空间，但整体地并不是。

人们还知道

定理 7.15 对称黎曼空间是齐性空间。

方才讲述的例是常曲率的情况，以下谈谈别的例子。

格拉斯曼流形（Grassmann manifold）在 n 维欧氏向量空间里，考虑 k 维（$1\leqslant k\leqslant n-1$）子向量空间。固定 k，考虑这样空间 L_k 的全体，把各 L_k 看做它的元素，可以证明它作成 $k(n-k)$ 维微分流形。称此流形为**格拉斯曼流形**，于其上给定黎曼度量如下。在 L_k 中取标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$，以后的 $\boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的选法是使 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是欧氏向量空间的标准正交基。又设

$$\omega_{\alpha\lambda}=(d\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\lambda)$$

令

$$ds^2=\sum_{\alpha,\lambda}\omega_{\alpha\lambda}^2\begin{pmatrix}\alpha=1,2,\cdots,k\\ \lambda=k+1,k+2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

可以证明式中 ds 与 L_k 中取的 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 以及与 L_k 垂直的 $\boldsymbol{e}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的取法无关。因此。这个 ds^2 是格拉斯曼流形的黎曼度量。根据这种度量，有

定理 7.16 格拉斯曼流形是对称黎曼空间。

证明 今任意取定一个 L_k，设它是 $L_k^{(0)}$。考虑张成 $L_k^{(0)}$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{e}_k^{(0)}$以及和它们一道作成整个标准正交基的 $\boldsymbol{e}_{k+1}^{(0)}, \cdots, \boldsymbol{e}_n^{(0)}$。用它们作基底时设任意向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量为（$x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n$），取以

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k, -x_{k+1}, \cdots, -x_n)$$

为分量的向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 与之对应，设此对应为 σ，σ 不改变向量的内积。故将 σ 作用 L_k 上，它是 ds^2 的等距变换。又 σ^2 是恒等变换，在 σ 下不变的 L_k 只有 $L_k^{(0)}$。这样，格拉斯曼流形是对称黎曼空间。

Elie Cartan (1869—1951)注意到对称黎曼空间，经过他一人之手几乎彻底研究完。此空间在齐性黎曼空间中是最基本的，它的应用极广。特别是以欧氏空间与球面为基础的某种分析学的基本定理可以扩充到这种对称黎曼空间里来，因此近年更加受到数学家的关心。

§7 空间形问题

即使是平坦黎曼空间（曲率为 0 的空间），其整体结构未必是一种。例如二维平坦黎曼空间的情况，欧氏平面与正圆柱面就整体而言完全不同。还有，将正方形

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 1$$

的对边同向相贴而得的圆环面上导入黎曼度量

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$$

是平坦的。

一般，连通而且完备的常曲率黎曼空间称为**空间形**（space form）。空间形

当曲率为 0 时，称为欧氏的，

当曲率为正时，称为球的，

当曲率为负时，称为双曲的。

这是因为下列定理成立之故。

定理 7.17 连通，单连通，完备常曲率 K 的黎曼空间与下列之一等距。

（1）若 $K=0$，欧氏空间，

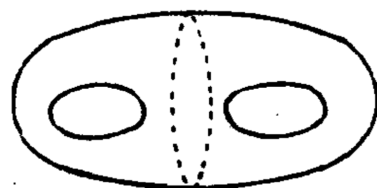
（2）若 $K<0$，双曲空间，

（3）若 $K>0$，球空间。

非单连通空间形的完全决定问题尚未充分解决。然而在二维情况，下列定理已经清楚了。

定理 7.18 二维球空间形只有球面或椭圆平面（在球面上关于球心对称的二点看做一点而得者）。

定理 7.19 二维欧氏空间形只有下列情况。平面，圆柱面，无限麦比乌斯带，克莱茵瓶。



第 7.8 图

定理 7.20 定理 7.19 以外的闭

曲面是双曲空间形。

例如将二圆环面的一部分剪开再贴在一起（如第 7.8 图）就是。

§8 嵌入问题

三维欧氏空间中的曲面是二维黎曼空间。而且其逆也成立。

定理 7.21 C^2 级二维黎曼空间局部地做为曲面可实现在三维欧氏空间中。

然而对于 $n(n\geqslant 3)$维时，$n+1$ 维欧氏空间的 n 维曲面(超曲面)是 n 维黎曼空间，但此黎曼空间是特殊黎曼空间，并不是一般的。而且，这时下列定理成立。

定理 7.22 C^2 级 n 维黎曼空间可以局部地做为子空间实现在 $\frac{1}{2}n(n+1)$维欧氏空间之中。

§9 高斯·崩尼定理的扩充

在 p.79 阐述了二维黎曼空间的高斯·崩尼定理，这里讲此定理在偶数维黎曼空间上的扩充。

首先假设 n 维微分流形 M 满足以下二条件：

（1）可定向　　　　（2）具有可数基底

我们来讲在M上积分 n次外微分形式。这里所说具有可数基底就是，适当选取M的可数邻域系（基），则其任意开集是此邻域系中几个邻域之和。

对于 n 次外微分形式 Ω，设 Ω 不为 0 的点集的闭包是紧致的。若 M 自己紧致，则所有 Ω 具有这样性质。对于这样 Ω，可唯一地对应以具有下列性质的实数$\int\Omega$。

(1) $\int(\Omega_1+\Omega_2)=\int\Omega_1+\int\Omega_2$

(2) 当 Ω 在一坐标邻域 U 之外为 0 时，对于 U 内的局部坐标 $x^1,\cdots,x^n$，设 $\Omega=f(x^1,x^2,\cdots,x^n)dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$，则

$$\int\Omega=\int_U f(x^1,x^2,\cdots,x^n)dx^1dx^2\cdots dx^n$$

称此$\int\Omega$为 Ω 在 M 上的**积分**。

其次设紧致D的边界 ∂D 具有下列性质。

取M的坐标邻域U，于U中取适当的坐标$(u^1,u^2,\cdots,u^n)$使得

$$在\ \partial D\cap U\ 里\ u^n=0，在 D\cap U\ 里\ u^n\geqslant 0。$$

这时，由于这样坐标系的取法可给 ∂D 定向。称此 D 为**具有正则边界的域**。

在这种定义下，成立下列**斯托克斯**(Stokes)**定理**。

定理 7.23 设D为可定向的具有可数基底的 n 维流形的紧致域，Ω 为 n 次外微分形式，而且

$$\Omega=d\pi$$

则

$$\int_D\Omega=\int_{\partial D}\pi$$

此定理的二维情况已在 $p.23$ 讲过。这是一个应用极广的定理，下述高斯·崩尼定理的扩充也是从它证出的。

高斯·崩尼(Gauss-Bonnet)**定理的扩充**。有 $2n$ 维紧致可定向黎曼空间M。设其线素为

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^{2n})^2$$

对此，设曲率微分形式为 $\Theta_j^{\ i}$。并且令

$$\Omega=(-1)^n\frac{1}{2^{2n}\pi^n n!}\sum_{i_1i_2\cdots i_n}\delta_{i_1i_2\cdots i_n}\Theta_{i_1}^{\ i_2}\Theta_{i_3}^{\ i_4}\cdots\Theta_{i_{2n-1}}^{\ i_{2n}}$$

可证它是与 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^{2n}$ 的取法无关的微分形式。式中 $i_1,i_2,\cdots,\cdots,i_{2n}$ 是 $1,2,\cdots,2n$ 的排列，随着此排列为偶奇设 $\delta_{i_1i_2\cdots i_{2n}}$ 为 ± 1。

用此 Ω，高斯·崩尼定理的扩充变为

$$\int_M \Omega = \chi(M)$$

式中 $\chi(M)$ 称为 M 的**欧拉·庞加莱示性数**（Euler-Poincaré characteristic），是表示M的拓扑性质的一个数．如果用贝蒂数 $B_i(i=0,1,2,\cdots,2n)$，$\chi(M)$ 可写为

$$\chi(M)=\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i B_i$$

§10　调和积分

先考虑紧致二维黎曼空间．对于M上定义的一次微分形式 ω，如果

$$d\omega=0$$

时，则称 ω 是**闭的**(closed)．又如果在M全体上存在函数 f 使得

$$\omega=df$$

则称 ω 是**恰当的**(exact)(或上边界(coboundary))．闭一次微分形式全体作成加法群．即若 ω_1，ω_2 是闭一次微分形式，则 $c_1\omega_1+c_2\omega_2$ (c_1,c_2 是常数）也是这样．又恰当一次微分形式全体也是如此．今考虑

闭一次微分形式的加法群/恰当一次微分形式的加法群

即设 ω_1，ω_2 是闭的，根据

$$\omega_1-\omega_2=df \Longleftrightarrow \omega_1\sim\omega_2$$

而将 ω 全体分类，在类之间按自然方法考虑加法，与数的乘法使之成群．人们知道此加法群作成有限维向量空间，故可以考虑它的维数．这个维数与M的所谓**第一贝蒂数**（Betti number）、拓扑学上基本的数 B_1 一致．这个贝蒂数的意思见下列叙述．

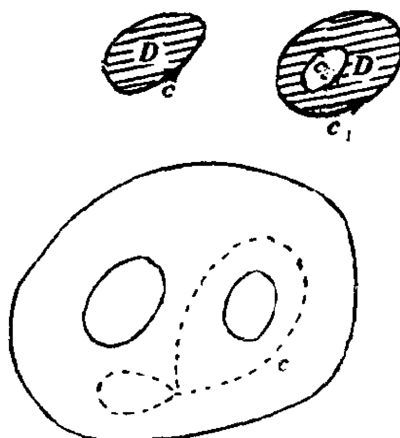
对于M中的域D考虑它的边界，记以 ∂D．而且将 ∂D看做有向曲线如下页左图所示．如果D是右图中的有斜线部分，规定 $\partial D=c_1-c_2$．其中 $-c_2$是取 c_2 的反向．一般对于闭曲线 c_1，c_2，……也考虑乘以

常数以及加法。再以域 D_1，D_2……为基础考虑加法群，对于其元D按自然的方法考虑 ∂D。称此 ∂D 为**边界**。边界的全体也作成加法群，由

闭曲线的加法群/边界的加法群可作成新加法群。即由

$$c_1 - c_2 = \partial D \Longleftrightarrow c_1 \sim c_2$$

分类，按自然方法使类全体成为加法群。这样得到的加法群是有限维的，其维数称为M的**第一贝蒂数**。



第 7.9 图

方才讲的是二维微分流形M上的事，从现在起把M看做黎曼空间。假设给定了线素

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

对于一次微分形式 ω 可令

$$\omega = p_1\omega^1 + p_2\omega^2 \quad (p_1, p_2 \text{ 是函数})$$

再作一次微分形式

$$\rho = p_1\omega^2 - p_2\omega^1$$

从 ω 作 ρ 的方法与基本标架 ω_1，ω_2 的取法无关（参照 $p.37$）．如果

$$d\omega = 0 \qquad \text{而且}\ d\rho = 0,$$

则称 ω 为**调和形式**（harmonic form）。调和形式全体作成加法群。人们知道，此加法群的维数与M的贝蒂数 B_1 一致。故如想调查M的贝蒂数只要调查调和形式即可。调和形式是很具体的东西，实际调查起来往往较容易，因此这种关系非常重要。

一次调和形式与拉氏方程有密切关系。即因为 $d\omega = 0$，故局部地 $\omega = df$，以下如 $p.38$ 所述，

$$d\rho = d(f_1\omega^2 - f_2\omega^1) = \Delta f \cdot \omega_1 \wedge \omega_2$$

如果 $\Delta f = 0$，则 $\omega = df$ 是调和形式。

到目前为止讲的是二维黎曼空间的一次微分形式以及第一贝蒂

数，同理可以讲 n 维黎曼空间的 k 次外微分形式与第 k 贝蒂数。以下只讲 k 次调和形式的定义。

设 M 为 n 维黎曼空间，

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\cdots+(\omega^n)^2$$

设 k 次外微分形式 Ω 为

$$\Omega=\sum a_{i_1i_2\ldots i_k}\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k} \qquad (10.1)$$

式中 $(a_{i_1i_2\ldots i_k})$ 是反称张量，求和的意思是从 $1,2,\cdots,n$ 任取 k 个的排列 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，关于这种排列相加。今定义 $^*\Omega$ 为

$$^*\Omega=\sum\varepsilon a_{i_1i_2\ldots i_k}\omega^{i_{k+1}}\wedge\omega^{i_{k+2}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_n} \qquad (10.2)$$

式中 $i_1,i_2,\cdots,i_k,i_{k+1},\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列，当此排列为偶排列时 ε 为 $+$，为奇排列时为负。求和与(10.1)一样考虑。

当

$$d\Omega=0,\quad d(*\Omega)=0$$

时，称 Ω 为**调和形式**。在研究 n 维紧致黎曼空间的贝蒂数这样拓扑性质上，它起着重要作用。

而在不一定是紧致黎曼空间上，将调和形式的定义稍加推广如下比较合适。先定义算子 δ 为

$$\delta=(-1)^{n(k-1)+1}*d*,$$

令

$$\Delta=d\delta+\delta d,$$

当 $\Delta\Omega=0$ 时，则称 Ω 为**调和形式**。

若 $d\Omega=0$，$d*\Omega=0$，当然 $\Delta\Omega=0$，当空间紧致时其逆也成立。

§11 凯拉流形

设有 $2n$ 维微分流形，可取 n 个复数 $z^1,z^2,\cdots,z^n$ 做为其局部坐标，在二坐标邻域相重迭处，相同点的两种复坐标 $z^1,z^2,\cdots,z^n$ 与 $w^1,w^2,\cdots,w^n$ 之间的一一对应的表示式

$$w^j = f^j(z^1, z^2, \cdots, z^n)$$

中，又设 $f^j(z^1, z^2, \cdots, z^n)$是 $z^1, z^2, \cdots, z^n$ 的正则函数(即 f^j 可展开为 $z^1, z^2, \cdots, z^n$的整函数）。这样的微分流形称为 n 维**复流形**(complex manifold)。

如用实数坐标，上述事实可叙述如下。令 $z^j = x^j + iy^j$，$w^j = u^j + iv^j$（x^j, y^j, u^j, v^j 是实数，$j = 1, 2, \cdots, n$），则

$$u^j = \varphi^j, \quad v^j = \psi^j$$

式中 φ^j, ψ^j 是 $x^1, x^2, \cdots, x^n, y^1, y^2, \cdots, y^n$ 的函数并满足

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^k} = \frac{\partial \psi^j}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^k} = -\frac{\partial \psi^j}{\partial x^k}$$

假设在复流形里给定

$$ds^2 = h_{ij}(z, \bar{z}) dz^i d\bar{z}^j \tag{11.1}$$

式中 $h_{ij} = h_{ij}(z, \bar{z})$是 $x^1, y^1, x^2, y^2, \cdots, x^n, y^n$ 的函数，设(h_{ij})是正定厄米形式(即 $h_{ij} = \bar{h}_{ji}$)。再从

$$z^j = x^j + iy^j, \quad \bar{z}^j = x^j - iy^j$$

得
$$x^j = \frac{1}{2}(z^j + \bar{z}^j), \quad y^j = \frac{1}{2i}(z^j - \bar{z}^j)$$

故可将 $x^1, y^1, x^2, y^2, \cdots, x^n, y^n$ 的函数看做 $z^1, \bar{z}^1, z^2, \bar{z}^2, \cdots, z^n, \bar{z}^n$ 的函数，因此才写成 $h(z, \bar{z})$这样。

如果将M看做实微分流形，则度量(11.1)使此流形为黎曼空间。具有这种度量的空间称为**厄米空间**(Hermitian space)。在厄米空间里可考虑与空间有联系的二次外微分形式

$$\Omega = h_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j \tag{11.2}$$

这时，如果

$$d\Omega = 0 \tag{11.3}$$

成立，则此厄米空间称为**凯拉空间**（Kählerian space)。

在凯拉空间里，人们知道存在函数 $K = K(z, \bar{z})$使得

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \tag{11.4}$$

以下举凯拉空间的例。

例 1 在 $2n$ 维欧氏空间里，使用笛卡儿坐标 x^1，$x^2,\cdots,x^{2n}$，则

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\cdots+(dx^n)^2$$

于是令

$$x^1+ix^2=z^1,\ x^3+ix^4=z^2,\cdots,\ x^{2n-1}+ix^{2n}=z^n$$

则

$$ds^2=dz^1d\bar{z}^1+dz^2d\bar{z}^2+\cdots+dz^nd\bar{z}^n$$

关于

$$\Omega=dz^1\wedge d\bar{z}^1+dz^2\wedge d\bar{z}^2+\cdots+dz^n\wedge d\bar{z}^n$$

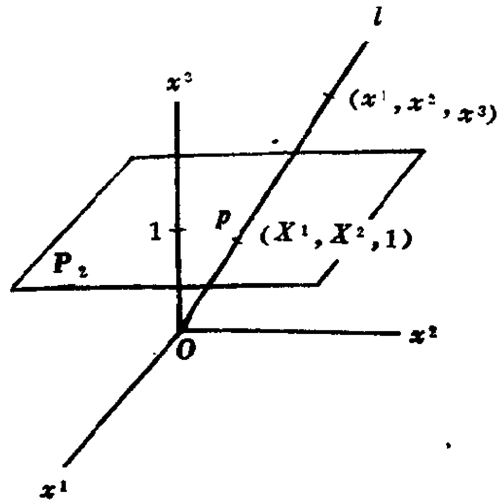
$$d\Omega=0$$

故它是凯拉空间。而且

$$K=z^1\bar{z}^1+z^2\bar{z}^2+\cdots+z^n\bar{z}^n$$

例 2 **复射影空间** (complex projective space)

先说明实射影空间。在三维空间里，考虑笛卡儿坐标 x^1，x^2，x^3 以及平面 P_2：$x^3=1$。考虑此平面 P^2 上的点 $p(X^1, X^2, 1)$ 以及通过原点的直线 l，考虑点 p 与直线 l 的对应。除了 x^1x^2 平面上的直线外，这种对应是一对一的。x^1x^2 平面上的直线所对应的点也添加在平面 $x^3=1$ 上。以下讨论这样的平面，称之为**射影平面**。



第 7.10 图

所谓射影平面上的点就是，至少一个不是 0 的三个实数的排列 (x^1,x^2,x^3) 按

若 $\dfrac{x^1}{y^1}=\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{x^3}{y^3}$，则 $(x^1,x^2,x^3)\sim(y^1,y^2,y^3)$

的等价关系～分类而得的类。这样的点全体称为**射影平面**。在射影平

面上，由

$$y^i = p_j{}^i x^j \qquad (i=1,2,3) \qquad 但\ \det(p_j{}^i) \neq 0$$

将点(x^1, x^2, x^3)变为点(y^1, y^2, y^3)是此平面上的位移。

射影平面也可想象是球面但其上关于球心对称的点看做相同的点。

至于复射影空间 P_n，在复 $n+1$ 维向量空间 C_{n+1} 里，两个向量

$$z=(z^1,z^2,\cdots,z^n,z^{n+1}),\quad w=(w^1,w^2,\cdots,w^n,w^{n+1})$$

按

$$\frac{z^1}{w^1}=\frac{z^2}{w^2}=\cdots=\frac{z^{n+1}}{w^{n+1}} \Longleftrightarrow z\sim w \tag{11.5}$$

分类，各类称为点，这样点全体就是复射影空间。

在 C_{n+1} 里，由

$$\langle z,z\rangle = z^1\bar{z}^1+z^2\bar{z}^2+\cdots+z^n\bar{z}^n+z^0\bar{z}^0$$

定义内积，考虑球面

$$\langle z,z\rangle=1 \tag{11.6}$$

满足此条件的向量 z 中，设对应于 P_n 的相同点者为 z,w，则由

$$\langle z,z\rangle=1,\ \langle w,w\rangle=1 \tag{11.7}$$

与(11.5)得

$$w=e^{i\alpha}z \qquad (\alpha 是实数) \tag{11.8}$$

故 P_n 的点是满足(11.6)的向量，再由(11.8)定义 $w\sim z$，由此分类而得．于是设$\langle z,z\rangle=1$，令

$$ds^2=\langle dz,dz\rangle-\langle dz,z\rangle\langle z,dz\rangle \tag{11.9}$$

则当(11.8)成立时可证

$$\langle dw,dw\rangle-\langle dw,w\rangle\langle w,dw\rangle=\langle dz,dz\rangle-\langle dz,z\rangle\langle z,dz\rangle$$

故(11.9)是 P_n 上的度量．而且(11.9)的右边的共轭是它自己，也可证明它是厄米度量．再令

$$\Omega=\langle dz\wedge dz\rangle-\langle dz,z\rangle\wedge\langle z,dz\rangle$$

它是基本二次外微分形式，又知

$$d\Omega=0$$

因此得

(11.9)是 P_n 上的凯拉度量，

称之为**椭圆度量**（elliptic metric）。

再令

$$Z^i = \frac{z^i}{z^0}, \quad |Z|^2 = (Z, Z) = \sum_{j=1}^{n} Z^j \overline{Z}^j$$

则得

$$ds^2 = (1 + |Z|^2)^{-2}((dZ, dZ) + \sum_{i<j} |dZ^i Z^j - dZ^j Z^i|^2) \tag{11.10}$$

在复 1 维（$n=1$）时，此度量变为

$$ds^2 = \frac{dz d\overline{z}}{(1 + z\overline{z})^2} \tag{11.11}$$

令 $z = x^1 + ix^2$，则得

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{(1 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^2}$$

根据 p.86 所述，这是常曲率为 1 的黎曼空间。

但在一般维数的情况下，(11.10) 并不是常曲率黎曼空间。

具有这样度量的复射影空间在凯拉空间中是最重要的，例如(11.11) 在复一元函数的某种研究上有用，而(11.10)在复 n 维解析映射的研究上使用。

一般在凯拉空间里调和积分的理论非常简明，因此可导入这种度量的复流形的拓扑结构容易研究。凯拉空间的重要性的一大半就在这点上。

§12 广义黎曼空间

在特殊相对性理论里，在空间的直角坐标为 (x^1, x^2, x^3) 的点，附加上时刻 t，把它看做 4 维空间的点 (x^1, x^2, x^3, t)，在这个空间里

以

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2dt^2 \qquad (c>0)$$

为度量时，称此空间为**敏高斯基空间**（Minkowskian space）。在这里，只有对于右边为正的方向，$\int ds$ 才有意义。

一般设在微分流形M上关于局部坐标 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 给定度量

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \cdots, x^n)dx^i dx^j \qquad (g_{ij} = g_{ji})$$

式中（g_{ij}）只满足 $\det(g_{ij}) \neq 0$，不要求是正定的。给定这样度量的空间称为**广义黎曼空间**，特别当不是黎曼空间时称为 pseudo-Riemannian 空间。

在广义黎曼空间里

黎曼联络，展开，张量的微分

等也和黎曼空间的情况一样处理，但在 pseudo-Riemannian 的情况，在下列问题上却很不相同。

有时在其切空间中，如取适当的标架，向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 的内积变为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x^1y^1 + \cdots + x^hy^h - x^{h+1}y^{h+1} - \cdots - x^ny^n$$

的形状，对于非 0 向量 $\boldsymbol{x}$ 也有时

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0.$$

并且一般来讲垂直关系非常复杂。因为这样，在普通黎曼空间里成立的性质，有很多在 pseudo-Riemannian 的情况却不成立。而这种空间的研究和应用在将来会给各种研究提供新方向。

习 题 略 解

习 题 一

1 （1） $\sqrt{a_1^2+2a_1a_2\cos\theta+a_2^2}$ （2） 设夹角为 α，则

$$\cos\alpha=\frac{a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)\cos\theta+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+2a_1a_2\cos\theta+a_2^2}\sqrt{b_1^2+2b_1b_2\cos\theta+b_2^2}}$$

（3） $\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|\sin\theta$

2 （1） $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_2a_3\cos\alpha+2a_3a_1\cos\beta+2a_1a_2\cos\gamma}$

（2） $\frac{1}{6}abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

3 （1） 不是张量 （2） 是张量

4 （1） 不是向量 （2） 向 量 （3） 不是张量 （4）张 量 （5）张 量 （6）不是向量也不是张量。（其中 u^iv_i 不是缩短）

5 根据在基底的变换下 $\bar{g}_{ij}=\sum\limits_{k,h}p_i{}^kp_j{}^hg_{kh}$，$\bar{v}^i=\sum\limits_{l}q_l{}^iv^l$ 以及 $\sum\limits_{j}q_l{}^jp_j{}^h=\delta_l{}^h$.

6 （1） 只要 $u_1\neq0$ 就是抛物线 （2） 只要 $u_2\neq0$ 就是抛物线 （3）直线 （4）圆 函数行列式是 $4(u_1^2+u_2^2)$，等于 0 的地方是原点。

7 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_1\cosh t+\boldsymbol{c}_2\sinh t$，$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_1\sinh t+\boldsymbol{c}_2\cosh t$

8 （1） $d\omega=2dx_1\wedge dx_2$ （2） $d\omega=0$ （3） $d\omega=3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ （4）设 $r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}$ 以及（3）中的外微分形式为 Ω，根据 $d(r^{-3}\Omega)=d(r^{-3})\wedge\Omega+r^{-3}d\Omega$ 计算之，则 $d\omega=d(r^{-3}\Omega)=0$

9 （1） $f=x_1^3-x_1^2x_2+2x_2^2+c$ （2） $f=\frac{1}{2}\log\frac{x-y}{x+y}+c$（$c$ 是常数）．全都是根据 $\omega=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$ 可得 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}$，再积分之。

10 （1） c 所围区域D的面积 （2）D的面积的负值 （3）D绕x_1轴旋转而得立体体积＝（D的重心移动而成曲线之长）×（D的面积）（4）令 $x_1=r\cos\theta$，$x_2=r\sin\theta$ 得$\int_c d\theta=0$。

习 题 二

1 从 $x_2^2=4u_1(x_1+u_1), x_2^2=4u_2(x_1+u_2)$ 得 $x_1=-u_1-u_2$，$x_2=\pm 2\sqrt{-u_1u_2}, ds^2=\left(1-\dfrac{u_2}{u_1}\right)du_1^2+\left(1-\dfrac{u_1}{u_2}\right)du_2^2$

2 从 $\dfrac{1}{4}(u_1+u_2)^2=(x_1+a)^2+x_2^2$，$\dfrac{1}{4}(u_1-u_2)^2=(x_1-a)^2+x_2^2$ 得 $u_1u_2=4ax_1$，$u_1^2+u_2^2=4(x_1^2+x_2^2+a^2)$，因此 $x_1=\dfrac{u_1u_2}{4a}$，$x_2^2=-\dfrac{1}{16a^2}(u_1^2-4a^2)(u_2^2-4a^2)$

故
$$ds^2=\frac{u_1^2-u_2^2}{4}\left(\frac{du_1^2}{u_1^2-4a^2}+\frac{du_2^2}{4a^2-u_2^2}\right)$$

3 令 $\omega_1=c_1du_1$，$\omega_2=c_2du_2$，则从 $df=\dfrac{1}{c_1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\omega_1+\dfrac{1}{c_2}\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\omega_2$ 得 $\rho=-\dfrac{1}{c_2}\dfrac{\partial f}{\partial u_2}\omega_1+\dfrac{1}{c_1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1}\omega_2$，再从 $d\rho=\Delta f\cdot\omega_1\wedge\omega_2$ 可求 Δf。在极坐标的情况下，令 $u_1=r$，$u_2=\theta$，$c_1=1$，$c_2=r$ 即可。

4 与3题一样，在球坐标的情况下，令 $u_1=r$，$u_2=\theta$，$u_3=\varphi$，$c_1=1$，$c_2=r$，$c_3=r\sin\theta$ 即可。

5 当 $k=0$ 时是直线，当 $k\neq 0$ 而是一定时，从 $d\left(\boldsymbol{x}-\dfrac{1}{k}\boldsymbol{e}_1\right)=0$ 可得 $\boldsymbol{x}-\dfrac{1}{k}\boldsymbol{e}_1$ 为定点（中心）。

6 设点为 $\boldsymbol{x}$，弧长为 s，时刻为 t，则由前题知 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}=v\boldsymbol{e}_1, \dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}(v\boldsymbol{e}_1)=\dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_1+v\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_1+kv^2\boldsymbol{e}_2$

7　从 $\frac{d}{dt}\left(\sum_i a_i \boldsymbol{e}_i\right)=\sum_i a_i \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}=\sum_{i,j} a_i\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j$ 得速度的分量为 $(\gamma_2 a_3-\gamma_3 a_2,\ \gamma_3 a_1-\gamma_1 a_3,\ \gamma_1 a_2-\gamma_2 a_1)$

习　题　三

1　若用直角坐标解之，设$P(x_1, x_2)$，$Q(y_1, y_2)$，则由 $y_1=\frac{kx_1}{x_1^2+x_2^2}$，　$y_2=\frac{kx_2}{x_1^2+x_2^2}$得 $dy_1^2+dy_2^2=\frac{k^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}(dx_1^2+dx_2^2)$.

若用极坐标解之，设 $OP=r$，则 $OQ=\frac{k}{r}$，并且$\left(d\frac{k}{r}\right)^2+\left(\frac{k}{r}\right)^2 d\theta^2=k^2 r^{-4}(dr^2+r^2 d\theta^2)$

2　设 $z=re^{i\theta}$，则 $\omega=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\ +i\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta$。　（1）的情况 当$z$在实轴,虚轴之外移动时是双曲线.(2) 的情况 当z在半径≠1的圆上移动时是椭圆.由保角性可见,这些双曲线与椭圆正交。

3　(1) 从此曲线上的点$(0, a)$到点(x_1, x_2)的弧长 σ 满足 $\sigma=a\sinh\frac{x_1}{a}$，$x_2=f(\sigma)=\sqrt{\sigma^2+a^2}$，故$K=-\frac{f''}{f}=-\frac{a^2}{(\sigma^2+a^2)^2}$

(2) 从原点到一般点的弧长满足 $\sigma=4a\left(1-\cos\frac{t}{2}\right)$，$x_2=f(\sigma)=\sigma-\frac{\sigma^2}{8a}$，故$K=-\frac{f''}{f}=\frac{2}{8a\sigma-\sigma^2}$.

4　在正交标架下 $ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2$，　$dS=\omega_1\wedge\omega_2$，　$\omega_i=\sum_j p_{ij}du_j$　$(i=1, 2)$，由此导出即得。

5　(2) 令$k=\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}$，则在曲面上的点(x_1, x_2, x_3)的单位法向量是$(k^{-1}p_1,\ k^{-1}p_2,\ -k^{-1})$。因此 $ds_0^2=d(k^{-1}p_1)^2+d(k^{-1}p_2)^2+d(-k^{-1})^2$，计算之即得。

6　根据前题知高斯曲率是 $\frac{a_1 a_2}{(1+a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2)^2}$。二曲面的线素

分别是

$$ds_1^2=(1+a_1^2x_1^2)dx_1^2+2a_1a_2x_1x_2dx_1dx_2+(1+b_2^2x_2^2)dx_2^2,$$

$$ds_2^2=(1+b_1^2x_1^2)dx_1^2+2b_1b_2x_1x_2dx_1dx_2+(1+b_2^2x_2^2)dx_2^2.$$

即使在上式里令 $x_1=p_1$，$x_2=p_2$，在下式里令 $x_1=a_1p_1/b_1$，$x_2=a_2p_2/b_2$ 也得不到相同式子。

7 设空间曲线为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\sigma)$（$\sigma$ 为弧长），则切线上的点可由 $\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}$ $\left(\boldsymbol{e}=\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\sigma}\right)$表示。因为 $d(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e})=(d\sigma+dt)\boldsymbol{e}+td\boldsymbol{e}$，所以此切线所作曲面的线素 ds 为 $ds^2=d(\sigma+t)^2+t^2d\theta^2$，式中 $d\theta=(d\boldsymbol{e},d\boldsymbol{e})^{1/2}$ 是以 $\boldsymbol{e}$ 为位置向量的球面上曲线的线素。因 $\theta=\theta(\sigma)$，故设 $\omega_1=d(\sigma+t)$，$\omega_2=td\theta$，再求 ω_{12} 得 $\omega_{12}=d\theta$。由 $-d\omega_{12}=K\omega_1\wedge\omega_2$ 可见，高斯曲率K是 0。

8 由 5 题知高斯曲率不是 0 .

9 令 $\omega_1=d\sigma$，$\omega_2=fd\theta$，则 $\omega_{12}=f'd\theta$，测地线的方程是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)-ff'\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=0 \quad \frac{d}{dt}\left(f\frac{d\theta}{dt}\right)+f'\frac{d\sigma}{dt}\ \frac{d\theta}{dt}=0.$$

10 从D去掉以N为圆心的充分小圆（设其周为 c_ε），在此域上求积分$\int dp$，因为 $dp=a^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi$，故

$$\int dS=\int_c p-\int_{c_\varepsilon}p$$

使此圆无限缩小得$\int_{c_\varepsilon}p\to 0$。

尚有 $l^2=4a^2\sin\dfrac{\theta}{2}=2a^2(1-\cos\theta)$

习 题 四

1 设由 $\overline{\boldsymbol{x}}=a_1\boldsymbol{x}+a_2\boldsymbol{y}$，$\overline{\boldsymbol{y}}=b_1\boldsymbol{x}+b_2\boldsymbol{y}$ 作成的 p_{ij} 为 $\overline{p}_{ij}$，令 $\Delta=a_1b_2-a_2b_1$，则 $\overline{p}_{ij}=\Delta\cdot p_{ij}$。

2 设原基底为 $\boldsymbol{e}_i$，新基底为 $\overline{\boldsymbol{e}}_i=p_i{}^j\boldsymbol{e}_j$，则分量间的变化规律是

$a_i{}^j = p_k{}^j \overline{a}_i{}^k$。故令 $\overline{A} = \det(\overline{a}_i{}^j)$，$P = \det(p_i{}^j)$，则 $A = P\overline{A}$.

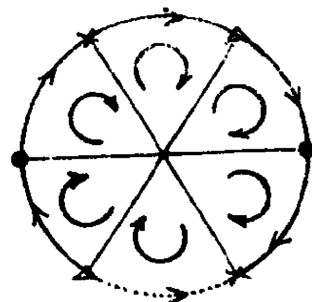
3 根据 $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 + 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| = (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2$。

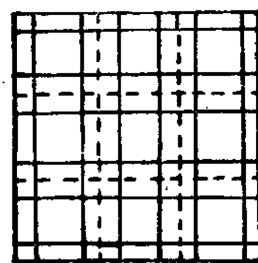
4 设 $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{e}$，并设此向量与 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}$ 作成原来欧氏空间的标准正交基。设从点 $\boldsymbol{p}$ 向此平面所作垂线的足为 $\boldsymbol{p} + l\boldsymbol{e}$，则此平面上的点为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + l\boldsymbol{e} + y^i\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，而且 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}|^2 = l^2 + \sum_i (l^i)^2$，当 $l^i = 0$ 时，此距离最小，故此垂线足为所求点，距离为 $|l|$。由 $(\boldsymbol{p} + l\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}) = k$ 得 $|l| = \dfrac{|k - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}|}$。所求点为 $\boldsymbol{p} + \dfrac{k - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$。

5 从 $(u+v, u+v) = (u, u) + (v, v) + 2(u, v)$ 可见，(u, v) 不变。

6 在基底变换下 $\overline{g}_{ij} = p_i{}^k p_j{}^h g_{kh}$。设 $(\overline{g}_{ij})$ 的逆矩阵为 $(\overline{g}^{ij})$，$\overline{g}^{li}$ 与 $\overline{g}_{ij}$ 相乘并关于 i 相加得 $\delta_j{}^l = \overline{g}^{li} p_i{}^k p_j{}^h g_{kh}$。向两边乘 $q_m{}^j$ 并关于 j 缩短得 $q_m{}^l = \overline{g}^{li} p_i{}^h g_{km}$。再向两边乘 g^{mj} 并关于 m 缩短得 $q_m{}^l g^{mj} = \overline{g}^{li} p_i{}^j$。由此可见 $\overline{g}^{li} = q_m{}^l q_j{}^i g^{mj}$。

7 如右图所示，考虑旋转方向，则通过直观可判断是不可定向的。精确地讲，要把图改成正方形，象 p.110那样思考即可。





第 1 图

8 可定向。

9 (1) 令 $dy = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3$，此方程完全可积的条件是 $d\omega = 0$。

(2) 设 $a_3 \neq 0$ 证明之如下所示(其他情况一样)。将 $dx_3 = -\dfrac{a_1}{a_3}dx_1 - \dfrac{a_2}{a_3}dx_2$ 代入 $d\omega = 0$ 的 dx_3 中去，可得所求条件。

10 为了用其他坐标系 $(\overline{x}^i)$ 表示 ω，$d\omega$；将 a_i，A_{ij} 的对应量记做 $\overline{a}_i$，$\overline{A}_{ij}$，

则 $A_{ij}dx^i\wedge dx^j=\overline{A}_{ij}d\overline{x}^i\wedge d\overline{x}^j$。从$A_{ij}$，$\overline{A}_{ij}$关于 i,j 反称得 $A_{ij}=\overline{A}_{kh}\dfrac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\dfrac{\partial\overline{x}^h}{\partial x^j}$。

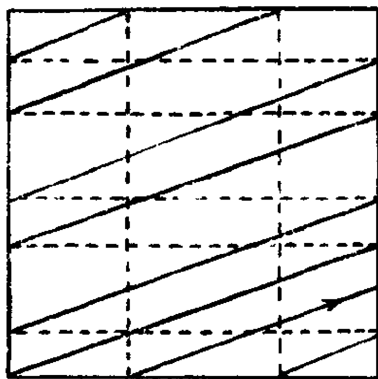
11 和前题一样。

习 题 五

1 因为是自然标架，故 $\omega^1=dx^1$，$\omega^2=dx^2$。(1) 挠率形式为 $\tau^1=0$，$\tau^2=-dx^2\wedge dx^1$；曲率为 0。(2) 由$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\omega^i}{dt}\right)+\dfrac{\omega^j}{dt}\dfrac{\omega_j{}^i}{dt}=0$ 可见，测地线方程为$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx^1}{dt}\right)=0$，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx^2}{dt}\right)+\dfrac{dx^1}{dt}\dfrac{dx^2}{dt}=0$. 由此得测地线是 $x^2=ae^{-x^1}+b$ (a，b 是常数)。

2 (1) 挠率为 0，曲率形式为 $\Theta_1{}^1=-dx^1\wedge dx^2$，$\Theta_1{}^2=0$，$\Theta_2{}^1=0$ $\Theta_2{}^2=dx^1\wedge dx^2$ (3) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx^1}{dt}\right)+\left(\dfrac{dx^2}{dt}\right)^2=0$，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx^2}{dt}\right)+\left(\dfrac{dx^1}{dt}\right)^2=0$.

3 因为测地线的方程可表示为 $x^2=ax^1+b$ 的形状，故在正方形中如右图所示。其中封闭的是 a 为有理数者。



第 2 图

4 因为在展开式中 $d\boldsymbol{e}_1=\omega_1{}^1\boldsymbol{e}_1$ 故 $\boldsymbol{e}_1$ 轴的方向一定，即展开后出现的 $\boldsymbol{e}_1$ 平行。(2) 因为$d\boldsymbol{e}_2=\omega_2{}^2\boldsymbol{e}_2+\omega_2{}^3\boldsymbol{e}_3$，$d\boldsymbol{e}_3=\omega_3{}^2\boldsymbol{e}_2+\omega_3{}^3\boldsymbol{e}_3$，故 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 张成的平面平行。

5 (1) 根据$\nabla_j v_k=\dfrac{\partial v_k}{\partial x^j}-\Gamma_j{}^i{}_k v_i$. (2) 根据 $R^i{}_{jkh}$，$T_l{}^i{}_k$ 用$\Gamma_j{}^i{}_k$的表示式以及共变导数的定义。

习 题 六

1 （1）在此旋转下 $k\cos\theta d\varphi$ 也不变。（2）在球面的旋转下，设 $(\theta, \varphi)\to(\overline{\theta}, \overline{\varphi})$，则 $\sin\theta d\theta\wedge d\varphi=\sin\overline{\theta}d\overline{\theta}\wedge d\overline{\varphi}$. 这时，$du-k\cos\theta d\varphi=d\overline{u}-k\cos\overline{\theta}d\overline{\varphi}$ 也完全可积。（3）验证 $d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2{}^1+\omega^3\wedge\omega_3{}^1$，$d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1{}^2+\omega^3\wedge\omega_3{}^2$，$d\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1{}^2+\omega^2\wedge\omega_2{}^3$ 即可。（4）$\Theta_1{}^2=-\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{3k^2}{4a^2}\right)\omega^1\wedge\omega^2$，$\Theta_2{}^3=-\frac{k^2}{4a^4}\omega^2\wedge\omega^3$，

$\Theta_3{}^1=-\frac{k^2}{4a^4}\omega^3\wedge\omega^1$ （5）$k=a$ 时。

2 在正交标架下，$R_{ijkh}=-K(\delta_{ik}\delta_{jh}-\delta_{ih}\delta_{jk})$. 试由此导出 $DR_{ijkh}=0$。在前题的黎曼空间里，若 $k\neq a$，则曲率张量场并不平行。$DR_{1213}\neq 0$。

3 在 M_{n-1} 里取正交标架，设 $ds_0^2=(\omega^1)^2+\cdots+(\omega^{n-1})^2$，并设其黎曼联络微分形式为 $\omega_\alpha{}^\beta=-\omega_\beta{}^\alpha$，则

$$\omega_\alpha{}^\beta,\ \omega_\alpha{}^n=0,\ \omega_n{}^\alpha=0,\ \omega_n{}^n=0\ (\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n-1)$$

为M的黎曼联络形式，展开式为 $d\boldsymbol{e}_n=0$。故$\boldsymbol{e}_n$ 作成平行向量场。

4 与前题一样取 $\omega_\alpha{}^\beta$，则

$$\omega_\alpha{}^\beta,\ \omega_\alpha{}^n=-\omega_n{}^\alpha=-\omega^\alpha,\ \omega_n{}^n=0$$

为M的黎曼联络形式，展开之得 $d(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_n)=0$，即 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_n$ 为定点。总之，在这种展开下，切空间的一点是不动的。

5 根据(2.15)令 $\omega^n=dt$，$\omega=\rho$，则所论测地线的切向量的分量为$(0, 0,\cdots,0, l)$，S_r 的切向量的分量为$(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, 0)$，可见二者垂直。

参　考　文　献*

如于本书前半册所述，欧氏空间的曲面论里包括相当多的黎曼几何内容。从这个角度列出一些以外微分形式为工具的微分几何书。

苏步青《微分几何五讲》上海科技出版社。1979。

陈省身《活动标架法》中国科学院数学研究所油印讲义.1978.

伯拉须开《微分几何引论》1950。有中译本。

小林昭七《曲线与曲面的微分几何》1977。有中译本。沈阳市数学会。1980。

黎曼几何的书有

矢野健太郎《黎曼几何学入门》森北出版。1971。有中译本。东北工学院　1983。

L. P. Eisenhart《Riemannian geometry》Princeton 1926，1949年第2版。

此书是用张量分析做为主要工具写的代表作。用此方法研究的成果有集大成书

J.A.Schouten 《Ricci-calculus》Springer 1923，1954第2版。

研究黎曼几何的第2方法是活动标架法如本书所述。

E.Cartan 《Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann》Gauthier-Villars,Paris。1928，1951年第2版。

是用此法写的一本好书。写本书时参照此书甚多，下书两法并用。

佐佐木重夫《黎曼几何学》共立出版。现代数学讲座，1957年。有中译本。

站在近代的基础上说明微分几何基础的有

---

* 在中国不易找到的书均未译出，并补充了一些近年出书以及中文图书。（译者注）

松岛与三《多样体入门》裳华房. 1965. 有英译本 Y. Matsushima《Differentiable manifolds》, Marcel Dekker 1972.

K.Nomizu《Lie groups and differential geometry》, Math. Soc. Japan. 1956. 在日本出版，是世界上这方面的先驱著作. 近年出版的有

S. Sternberg《Lectures on differential geometry》, Prentice Hall. 1962.

S.Kobayashi, K.Nomizu《Foundations of differential geometry》, Interscience Publisher I 1964, II 1969.

R.Bishop, R. J.Crittenden《Geometry of manifolds》 Academic Press, 1964.

立花俊一《黎曼几何》朝仓书店 近代数学讲座 1967,1974. 有中译本 东北工学院 1981.

立花俊一《黎曼几何习题集》同上 1968, 1974. 有中译本. 同上.

苏步青《现代微分几何学概论》上海科学技术出版社 1961.

石原 繁《几何学概论》共立出版社 1976. 中译本译名是《微分几何学概论》东北工学院 1982.

M. Spivak《A comprehensive introduction to differential geometry I, II, III, IV, V》Boston: Publish or Perish 1970, 1975.

R. S. Millman, G. B. Parker《Elements of differential geometry》, Prentice-Hall 1977.

W.Klingenberg《A course in differential geometry》, Springer 1978.

索　引

（汉字按拼音排列）

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

S